

# **Eisalterberechnung am Beispiel des Antarktischen Eisschildes**

Vom Fachbereich Mechanik der  
Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN  
genehmigte  
DISSERTATION

von

**Dipl.-Ing. Bernd Mügge**

aus Darmstadt

Referent: Prof. K. Hutter, Ph. D.

Korreferent: Prof. Dr. R. Greve

Tag der Einreichung: 29. Juni 2004

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Juli 2004

Darmstadt 2004

D 17

*Über eins müssen wir uns klar sein. Der Planet ist nicht in Gefahr.*

*Wir sind in Gefahr.*

*Wir haben nicht die Macht den Planeten zu zerstören - oder ihn zu retten.*

*Aber vielleicht haben wir die Macht, uns zu retten.*

– Michael Crichton

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich alljenen danken die auf die ein oder andere Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere Danke ich meinen Eltern, die mir das Studium und die anschließende Promotion überhaupt erst möglich machten und die mich auf meinem Weg immer unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Ph.D. Kolumban Hutter. Sein unermüdlicher Einsatz und Engagement für seine Studenten, insbesondere beim Auffinden weiterer Finanzierungsmöglichkeiten, sein unaufhörliches Drängen und nicht zuletzt das gewissenhafte Korrekturlesen haben dieser Arbeit zu einem glücklichen Abschluß verholfen.

Herrn Professor Dr. Ralf Greve danke ich für die Betreuung der Dissertation und der Übernahme des Korreferates. Seiner Anleitung und Unterstützung ist es zu verdanken, daß diese Arbeit die hier vorliegende Form annehmen konnte.

Meinen Kollegen aus der Arbeitsgruppe 3, jetzigen und ehemaligen, danke ich für das angenehme und freundliche Arbeitsklima. Besonders zu erwähnen sind hier Herr Dr. Alexij Savvin, meinen Vorgänger auf dem Gebiet der Dynamik des antarktischen Eisschildes, der mich in verschiedenen Gesprächen überhaupt erst auf die Idee brachte zu promovieren, Herr Dr. Magnus Weis, dessen hervorragende Arbeit als Betreuer des Computernetzwerkes der Arbeitsgruppe ich fortzuführen versuchte, Herr Dr. Harald Ehrentraut, der immer ein offenes Ohr hatte und mir in Rat und Tat zur Seite stand, Herr Dr. Yongqi Wang, dessen profundes Wissen auf dem Gebiet der Numerik half sich ergebende Probleme zu umschiffen, und meine langjährigen Kollegen auf dem Gebiet der Glaziologie Frau Dipl.-Phys. Angelika Humbert und Herr Dr. Luca Placidi, für zahlreiche Gespräche, Anregungen und ihre Unterstützung.



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein neues Verfahren zur Lösung der Eisaltersgleichung in konservativer Form hergeleitet. In Verbindung mit dem Eisschildmodell SICOPOLIS erhält man somit ein Instrument, das in der Lage ist das Alter des Eises an jeder beliebigen Stelle im Eisschild zu bestimmen. Hierfür wird zunächst ein numerisches Verfahren zur Lösung der allgemein gültigen Altersgleichung formuliert. Anschließend wird durch analoges Vorgehen ein Lösungsverfahren für die Eisaltersgleichung, die den in SICOPOLIS verwendeten Koordinatentransformationen unterworfen wurde, bestimmt.

Desweiteren werden die für die numerische Simulation des antarktischen Eisschildes verwendeten Datensätze vorgestellt und Simulationen für unterschiedliche Randbedingungen durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Simulationen werden in Hinblick auf ihre Übereinstimmung mit der Realität diskutiert. Besonderes Augenmerk wird auf den Vergleich des berechneten Eisalters mit den Berechnungen mittels des bisherigen Lösungsverfahrens gerichtet.

Weiterhin werden Ergebnisse für frühere Warm- bzw. Kaltzeiten diskutiert und Ergebnisse für verschiedene Szenarien der globalen Erwärmung vorgestellt.

# Abstract

In order to solve the equation of the age of ice in conservative form, a new scheme is derived. In connection with the three-dimensional polythermal ice-sheet model SICOPOLIS it is possible to determine the age of the ice at any point within the ice sheet. Therefore a general numerical solution of the age equation is formulated. Afterwards the coordinate transformations used in SICOPOLIS are applied.

In addition datasets, which are used to simulate the antarctic ice sheet, are introduced. Calculations with different boundary conditions are discussed in comparison with the real state of the ice sheet. In particular the computed age of the ice is compared with the computations obtained with the previous method.

Furthermore, calculations of former glacials and interglacials are discussed and different global warming scenarios are shown.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation</b>	<b>9</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>13</b>
<b>2 Datierung von Eisbohrkernen</b>	<b>19</b>
<b>3 Das Eisschildmodell SICOPOLIS</b>	<b>23</b>
3.1 Theorie . . . . .	24
3.1.1 Annahmen und Einschränkungen . . . . .	24
3.1.2 Vereinfachte Modellgleichungen . . . . .	26
3.2 Transformation der horizontalen Koordinaten . . . . .	31
3.2.1 Allgemeines . . . . .	32
3.2.2 Geographische Koordinaten . . . . .	33
3.2.3 Stereographisch erweiterte kartesische Koordinaten . . . . .	34
3.2.4 Stereographische Erweiterung von krummlinigen, rechtwinkligen Koordinaten . . . . .	37
3.2.5 Teiltransformierte Modellgleichungen . . . . .	37
3.3 Transformation der vertikalen Koordinate . . . . .	41
3.3.1 $\sigma$ -Transformation . . . . .	42
3.3.2 Volltransformierte Modellgleichungen . . . . .	43
3.4 Das numerische Gitter . . . . .	48
<b>4 Verwendete Datensätze</b>	<b>51</b>
4.1 Eisoberflächentopographie . . . . .	52
4.2 Eisdicke, Meerestiefe und Wassersäule . . . . .	53
4.3 Bodentopographie . . . . .	54
4.4 Schneefallrate . . . . .	55
4.5 Schmelzrate . . . . .	57
4.6 Oberflächentemperatur . . . . .	57
4.7 Geothermer Wärmefluß . . . . .	59

4.8	Klimageschichte . . . . .	59
4.9	Meeresspiegelvariation . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Eisaltersberechnung mit SICOPOLIS</b>	<b>61</b>
5.1	Die advective Eisaltersgleichung . . . . .	61
5.2	Das numerische Lösungsverfahren . . . . .	62
5.2.1	Allgemeines . . . . .	62
5.2.2	First Order Upstream (UP1) . . . . .	66
5.3	Verhalten an den Grenzen des Eisschildes . . . . .	68
5.4	Lösung der transformierten Eisaltersgleichung . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Numerische Simulationen</b>	<b>89</b>
6.1	Einfluß des geothermen Wärmeflusses . . . . .	89
6.2	Eisalter . . . . .	92
6.3	Heute, Gestern, Morgen . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>105</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>111</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>113</b>



# Notation

$\bullet$	beliebige Größe
$\bullet_c$	Größe $\bullet$ im Kalteisbereich
$\bullet_r$	Größe $\bullet$ in der Lithosphäre
$\bullet_t$	Größe $\bullet$ im temperierten Eisbereich
$A$	Eisalter
$A_e$	Albedo der Erde
$A(T')$	Rate-Faktor für kaltes Eis
$A_t(\omega)$	Rate-Faktor für temperiertes Eis
$A_{(t)}(\cdot)$	Rate-Faktor für kaltes oder temperiertes Eis
$a_m^\perp$	Volumenfluß durch die CTS
$a_s^\perp$	Akkumulations-Ablations-Funktion für die Eisoberfläche
$a$	Streckparameter für die $\sigma$ -Koordinatentransformation des Kalteisbereiches
$b$	$z$ -Koordinate der Eisbasis (Lithosphärenoberseite)
$b_0$	stationärer Wert für $b$ ohne Eislast
$b_r$	$z$ -Koordinate der Lithosphärenunterseite
$C$	Gleitfunktion für kalte Basis
$C_t$	Gleitfunktion für temperierte Basis
$C_{(t)}$	Gleitfunktion für kalte oder temperierte Basis
$c$	spezifische Wärme für Eis
$c_r$	spezifische Wärme für die Lithosphäre
$D(\omega)$	Wasserdrainage-Funktion
$E$	Enhancement-Faktor im Fließgesetz
$\mathbf{F}, f, g, h$	Flußterm bzw. dessen Komponenten
$f(\sigma)$	Kriechfunktion für kaltes Eis
$f_t(\sigma)$	Kriechfunktion für temperiertes Eis
$f_{(t)}(\sigma)$	Kriechfunktion für kaltes oder temperiertes Eis
$g$	Schwerebeschleunigung
$h$	$z$ -Koordinate der freien Eisoberfläche

$H$	Eisdicke
$H_c$	Dicke der kalten Eisschicht
$H_t$	Dicke der temperierten Eisschicht
$H_r$	Dicke der Lithosphäre
$i, j, k_{c,t,r}$	Laufindices für die diskretisierten $x$ -, $y$ - bzw. $\zeta_{c,t,r}$ -Richtungen
$i_{\max}, j_{\max}$	Maximalwerte für $i, j$
$k_{c,t,r_{\max}}$	Maximalwerte für $k_{c,t,r}$
$L$	latente Schmelzwärme für Eis
$\dot{m}_b^w$	Wasser-Massenstrom in den Boden hinein
$n$	Laufindice für die Diskretisierung der Zeit
$n_{\max}$	Maximalwerte für $n, \tilde{n}$
$p$	Druck
$P_{kw}^\downarrow$	von der Erde absorbierten Strahlungsleistung
$P_{lw}^\uparrow$	von einem schwarzen Körper ausgehende Strahlungsleistung
$q_{\text{geo}}$	geothermer Wärmefluß
$\mathbf{q}, q_i$	horizontaler Massenfluß, bzw. dessen $i$ -Komponente
$R_e$	Erdradius
$S$	Akkumulationsrate (Schneefallrate)
$S^{\text{today}}$	Heutige Akkumulationsrate (Schneefallrate)
$S_0$	Solarkonstante
$t$	Zeit
$t_{ij}$	$ij$ -Komponente des Spannungstensors
$t_{ij}^R$	$ij$ -Komponente des Spannungsdeviators
$T$	Temperatur
$T_0$	Schmelztemperatur bei verschwindendem Druck
$T'$	homologe Temperatur ( $T - T_M$ )
$T_e$	Temperatur des schwarzen Körpers bzw. mittlere Oberflächen- temperatur der Erde
$T_M$	druckkorregierte Schmelztemperatur
$T_{s,\text{ma}}(x, y, t)$	Jahresmittel der Lufttemperatur
$\tilde{T}_{s,\text{ma}}(x, y, t)$	Jahresmittel der Lufttemperatur aus der Huybrechts Parametrisierung
$T_s$	Eisoberflächentemperatur (10 m-Firntemperatur)
$\mathbf{v}, v_i$	Geschwindigkeit (baryzentrisch), bzw. deren $i$ -Komponente
$\mathbf{v}_b, (v_b)_i$	Eisgeschwindigkeit (baryzentrisch) an der Basis, bzw. deren $i$ -Komponente
$\mathbf{v}_w, v_{w,j}$	Geschwindigkeit des Wassers in der Mischung Eis plus Wasser,

	bzw. deren $j$ -Komponente
$\mathbf{w}, w_i$	Geschwindigkeit einer singulären Fläche, bzw. deren $i$ -Komponente
$x, y$	Horizontale kartesische Koordinaten
$\mathbf{x}$	Ortsvektor eines beliebigen Punktes im Eisinneren
$\mathbf{x}_0$	Ortsvektor eines beliebigen Punktes an der Eisoberfläche
$z$	Vertikale kartesische Koordinate (Höhe über NN)
$z_b$	$z$ -Koordinate der Eisbasis
$z_{b0}$	$z$ -Koordinate des entspannten Felsgrundes
$z_{f_n}$	$z$ -Koordinate der Isochronenfläche $n$
$z_m$	$z$ -Koordinate der CTS
$z_s$	$z$ -Koordinate der freien Oberfläche
$\beta$	Clausius-Clapeyron-Gradient
$\Delta x, \Delta y$	Ortsauflösung für die $x$ - und $y$ -Richtung
$\Delta z, \Delta \zeta_{c,t,r}$	Ortsauflösung für die $z$ bzw. die $\zeta_{c,t,r}$ -Richtung
$\Delta t$	zeitliche Auflösung
$\Delta T_{ma}(t)$	Abweichung des Jahresmittels der Lufttemperatur über dem Eis $T_{s,ma}$ von den heutigen Werten
$\Delta T_{max}$	Angenommener, maximaler Anstieg des Jahresmittels der zukünftigen Lufttemperatur über dem Eis $T_{s,ma}$
$\varepsilon$	Aspektverhältnis
$\theta, \phi, \psi$	Dissipation-Limiter
$\kappa$	Wärmeleitfähigkeit für Eis
$\kappa_r$	Wärmeleitfähigkeit für die Lithosphäre
$\nu$	Wasser-Diffusivität im temperierten Eis
$\rho, \rho_i$	wahre Dichte für Eis bzw. die Mischung Eis plus Wasser
$\rho_a$	wahre Dichte der Asthenosphäre
$\rho_r$	wahre Dichte der Lithosphäre
$\sigma$	effektive Scherspannung
$\sigma_{SB}$	Stefan-Boltzmann-Konstante
$\tau_V$	Verzögerungszeit der isostatischen Einstellung der Asthenosphäre
$\tau_{c,t,r}$	Zeit im $\sigma$ -Koordinatensystem für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. die Lithosphäre
$\xi_{c,t,r}, \eta_{c,t,r}$	horizontale Koordinaten des $\sigma$ -Koordinatensystems für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. die Lithosphäre
$\zeta_{c,t,r}$	vertikale Koordinate des $\sigma$ -Koordinatensystems für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. die Lithosphäre
$\varphi$	geographische Breite

$\varphi_0$	Breitenkreis der Bildebene der stereographischen Projektion
$\omega$	Wassergehalt des temperierten Eises (Massenanteil)
$[H]$	typische Vertikaldimension
$[L]$	typische Horizontaldimension
$[V_H]$	typische Vertikalgeschwindigkeit
$[V_L]$	typische Horizontalgeschwindigkeit
$\mathcal{P}_b^w$	basale Schmelzrate
F	Froude-Zahl

# 1 Einführung

Das Wetter hat schon seit jeher das Leben der Menschen beeinflusst. Wie wird die Ernte? Wie kalt und lang wird der Winter? Gibt es Schnee? Drohen Überschwemmungen oder Trockenheit? All dies waren und sind Fragen, die uns beschäftigen. Das Wetter als unverfängliches und neutrales Gesprächsthema ist geradezu sprichwörtlich. Andererseits sind Klima, Klimawandel und Erderwärmung Schlagworte, die in den letzten Jahren und Jahrzehnten in das Bewußtsein der Öffentlichkeit gerückt sind.

Aber was ist eigentlich Wetter und Klima? Wo liegt der Unterschied?

- Als **Wetter** bezeichnet man den momentanen Zustand der Atmosphäre an einem bestimmten Ort. Ein Zustand, der sich mit Raum und Zeit sehr schnell ändern kann [29].
- **Klima** hingegen beschreibt nicht nur den gemittelten Zustand der Atmosphäre über ein größeres Zeitintervall (üblicherweise mindestens 30 Jahre) und eine größere Region (z.B. einen Kontinent, eine Hemisphäre oder gar die ganze Erde), sondern bezieht auch die Wechselwirkungen mit anderen Komponenten des Klimasystems mit ein. Das Klima bezieht sich neben der Atmosphäre (die Lufthülle der Erde), auch auf die Hydrosphäre (das Wasser der Erde), die Kryosphäre (das Eis der Erde), die Biosphäre (das pflanzliche und tierische Leben) und die Lithosphäre (die feste Erde) [29, 9].

Wie das Wetter, so ist auch das Klima ständigen Veränderungen unterworfen. Dieser **Klimawandel** wird durch vielfältige Schwankungen der globalen Durchschnittstemperatur gekennzeichnet, die sich hinsichtlich ihrer Stärke und der Zeitskala, auf der sie ablaufen, unterscheiden. Die Größenordnung letzterer variiert zwischen einigen Jahrzehnten und mehreren 100 Millionen Jahren [15].

Ursache für diese Klimaschwankungen sind Veränderungen der Strahlungsbilanz der Erde, genauer gesagt dem von der Erde und ihrer Atmosphäre absorbierten Anteil der Sonnenstrahlen. Hierbei spielen verschiedene Phänomene eine Rolle.

Wahrscheinlich die hauptsächliche Ursache für das Auftreten von sogenannten Eiszeit-

altern, in denen es, im Gegensatz zu Warmzeitaltern, zu großflächigen Vereisungen der Erdoberfläche kommt, ist das Vorhandensein von ausgedehnten Landmassen in den Polargebieten aufgrund der Kontinentaldrift. Nur dann ist die Bildung großer Eismassen aus akkumuliertem Schneefall überhaupt möglich, die wegen ihres hohen Rückstrahlvermögens einfallenden Sonnenlichts, ihrer Albedo, zu einer verringerten Energieaufnahme der Erdoberfläche und damit zur Abkühlung führen.

Auch die periodischen Schwankungen von Bahnparametern der Erdumlaufbahn, wie der Bahnexzentrizität mit einer Periode von 96000 Jahren, die Schwankung der Erdsachsneigung relativ zur Bahnebene (40000 Jahre) und die Präzession der Erdachse in Verbindung mit der Orientierung der Bahnellipse im Raum (21000 Jahre), beeinflussen die Sonneneinstrahlung und ihre Verteilung [35, 20, 2]. Sie sind unter anderem für die wohl bekannteste Klimaveränderung, dem wiederholten Wechsel von Eiszeiten und Warmzeiten in dem seit ca. 2 Millionen Jahren andauernden Eiszeitalter, dem Quartär, verantwortlich.

An dieser Stelle sollte man aber auch die verschiedenen, teils unbekannten Zyklen nicht vergessen, die die Sonne durchläuft, und die zu Veränderungen der Strahlenintensität führen können. Auf diesem Gebiet ist noch einiges an Forschungsarbeit zu leisten, erst mit einer weit längeren Beobachtungsdauer, als heute, und wachsendem Verständnis der Vorgänge innerhalb der Sonne, wird man in der Lage sein diese Variationen vorherzusagen. Ein weiterer bedeutender Faktor ist das Absorptionsvermögen der Erdatmosphäre für langwellige Wärmestrahlung, die von der Erdoberfläche reflektiert wird. Hierbei spielt die Zusammensetzung der Atmosphäre, insbesondere der Anteil bestimmter Gase, wie Wasserdampf, Kohlendioxid, Methan und FCKW, eine wichtige Rolle. Eine kurze Beispielrechnung soll dies verdeutlichen:

Für die von der Erde absorbierte kurzwellige Sonnenstrahlung gilt

$$P_{\text{kw}}^{\downarrow} = 4\pi R_{\text{e}}^2 \bar{S}_0 (1 - A_{\text{e}}), \quad (1.1)$$

mit der absorbierten Strahlungsleistung  $P_{\text{kw}}^{\downarrow}$ , dem Erdradius  $R_{\text{e}}$ , der Albedo  $A_{\text{e}}$  und der mittleren Solarkonstante  $\bar{S}_0 = 342 \text{ W/m}^2$ , die die von der Sonne eingestrahlte Energiemenge pro Quadratmeter Erdoberfläche beschreibt.

Des weiteren ergibt sich für die von einem schwarzen Körper aufgrund seiner Temperatur ausgehenden, langwelligen Strahlung, die Strahlungsleistung  $P_{\text{lw}}^{\uparrow}$  nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz zu

$$P_{\text{lw}}^{\uparrow} = 4\pi R_{\text{e}}^2 \sigma_{\text{SB}} T_{\text{e}}^4, \quad (1.2)$$

wobei  $\sigma_{\text{SB}}$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $T_{\text{e}}$  die Temperatur des schwarzen Körpers, also der Erde, darstellen. Da die Strahlenbilanz für ein derart konstruiertes System

ausgeglichen sein muss, gilt

$$P_{\text{kw}}^{\downarrow} = P_{\text{lw}}^{\uparrow}, \quad (1.3)$$

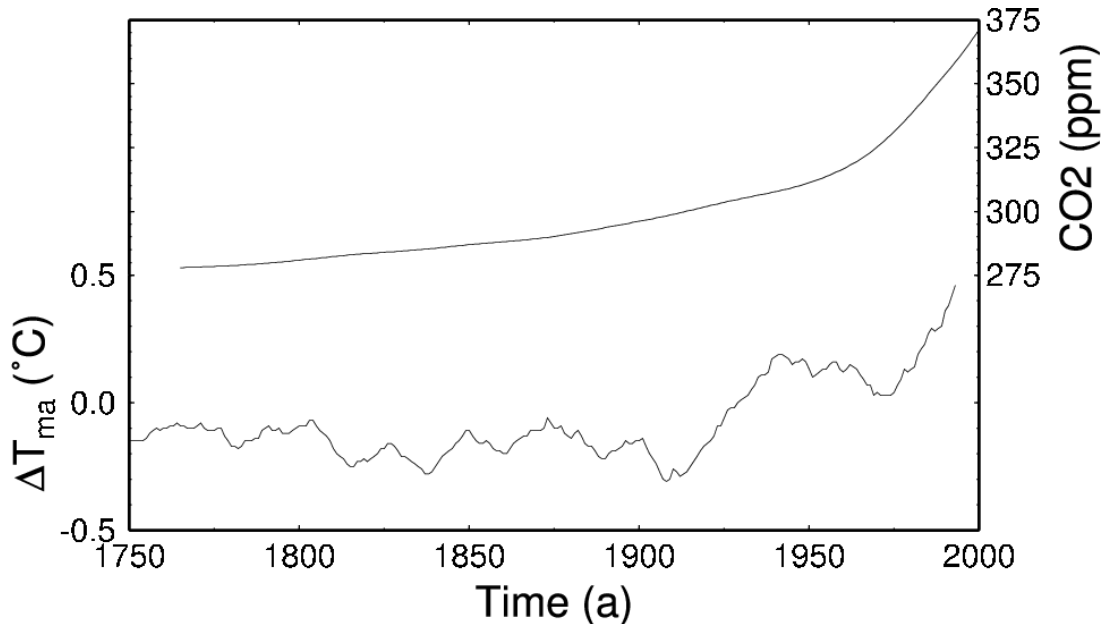
und es folgt für die mittlere Temperatur der Erde

$$T_e = \left( \frac{\bar{S}_0(1 - A_e)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4} = -18 \text{ }^{\circ}\text{C}. \quad (1.4)$$

Die tatsächlich gemessene mittlere Oberflächentemperatur liegt aber bei  $T_s = +15 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Es ergibt sich also eine Differenz von 33 K, die auf die Absorption der reflektierten Strahlung zurück zu führen ist.

Dieses Phänomen nennt man den **natürlichen Treibhauseffekt**. Im Gegensatz hierzu steht der vom Menschen verursachte antropogene Teibhauseffekt, von den Medien missverständlicherweise als “der Treibhauseffekt” bezeichnet.

Der antropogene Anteil am Treibhauseffekt läßt sich auf die mit der Industrialisierung einhergehenden Erhöhung der Kohlendioxid-, Methan- und FCKW-Konzentration in der Atmosphäre zurück führen [9]. Abbildung 1.1 zeigt die Entwicklung der Temperatur und der Kohlendioxidkonzentration relativ zu heute in den letzten zweihundertfünfzig Jahren. Sie zeigt den Anstieg der Kohlendioxidkonzentration seit Beginn der Industrialisierung Anfang des neunzehnten Jahrhunderts um mehr als ein Drittel auf heute 375 ppm, und den damit verbundenen Temperaturanstieg von ca.  $0.75 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .



**Abbildung 1.1:** Entwicklung der Kohlendioxidkonzentration [12] und der Jahresmitteltemperatur [10] in den letzten 250 Jahren.

Ein solch starker Anstieg der globalen Jahresmitteltemperatur, allgemein als **Erder-**

**wärmung** oder “global warming” bezeichnet, der in seiner Intensität wahrscheinlich sogar noch weiter zunimmt, bleibt nicht ohne Folgen, wie z. B. eine räumliche und zeitliche Umverteilung von Niederschlägen andeutet. Aber auch das Abschmelzen alpiner Gletscher, sowie ein zunehmender Masseverlust der polaren Eiskappen resultieren aus der Erwärmung, was zu einem Ansteigen des Meeresspiegelniveaus führt.

Vor allem der Massenverlust der polaren Eisschilde, deren vollständiges Abschmelzen im Falle von Grönland einen Anstieg des Meeresspiegels um 7,2 m und im Falle der Antarktis einen Anstieg von 61,1 m bedeuten würde [8], birgt ein großes Potential an katastrophalen Auswirkungen:

- Regionen wie Bangladesch werden schon heute regelmäßig von schweren Überschwemmungen heimgesucht.
- Koralleninseln, wie Bora-Bora oder Saipan, würden bei einem geringen Anstieg des Meeresspiegels einen Großteil ihrer bewohnbaren Landfläche verlieren oder gar vollständig von der Landkarte verschwinden.

Aber ein Meeresspiegelanstieg würde nicht nur in fernen Ländern zu schwerwiegenden Veränderungen führen, sondern auch in unserer unmittelbaren Nachbarschaft:

- Die Deiche an der norddeutschen und niederländischen Küste haben ihre maximale Höhe erreicht und können aufgrund der Bodenbeschaffenheit während einer Flut nicht weiter ausgebaut werden. Eine Überflutung dieser über Jahrhunderte dem Meer abgerungenen Landstriche wäre die Folge.
- Viele Seehäfen der Welt, so auch der Hamburger Hafen, müßten bei einem Anstieg des Meeresspiegels um 40 cm bis 60 cm komplett neu gebaut werden.

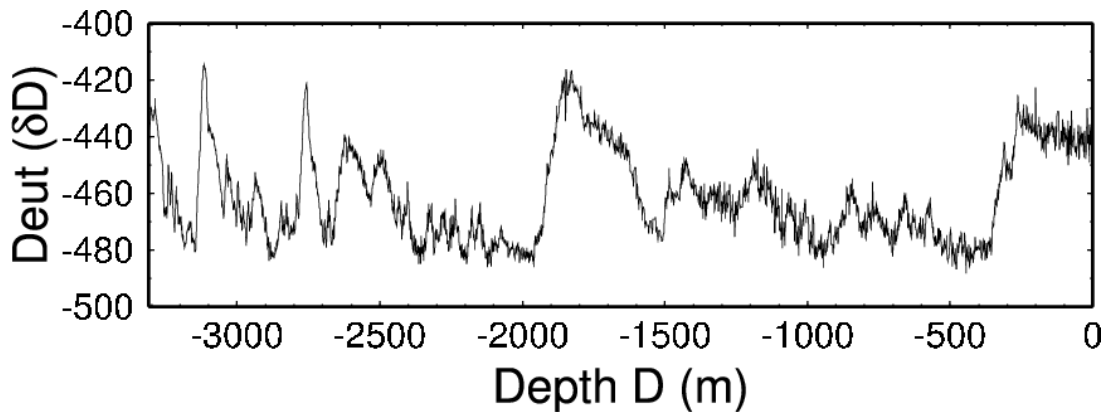
Bei solch katastrophalen Auswirkungen ist es umso wichtiger zu verstehen, wie und in welchem Maße der Mensch das Klima beeinflusst oder verändert. Um dieses Ziel zu erreichen, ist es aber notwendig, das äußerst komplexe Klimasystem mit seinen teils heftigen natürlichen Klimaänderungen selbst besser zu verstehen.

Ein wichtiger Bestandteil dieses Vorhabens ist es, Erkenntnisse über das Klima vergangener Zeiten zu sammeln. Hierfür wertet man verschiedene Quellen, in denen Informationen über das Klima archiviert sind, aus. Solche Klimaarchive sind zum Beispiel Wetteraufzeichnungen, wie sie mancherorts schon seit mehreren Jahrhunderten geführt werden, aber vor allem auch natürliche Quellen, wie die Ringe eines Baumes, Sedimentbohrkerne und nicht zuletzt Eisbohrkerne, die man aus Gletschern oder den beiden großen Inlandeisschil-den auf Grönland oder in der Antarktis gewinnt.

Besonders Eisbohrkerne bieten eine Fülle von Informationen über die chemische Zusammensetzung des Niederschlags und der Atmosphäre, da sich in Luftblasen die Atmosphäre



in ihrer Zusammensetzung, wie sie zu der Zeit herrschte, als sich das Eis formte, erhalten hat. Nun gibt es die Möglichkeit, diese Daten mit der Temperatur, die man aus der Deuteriumkonzentration  $\delta D^1$  (siehe Abbildung 1.2) ermitteln kann, in Verbindung zu bringen. Im Falle langer Eisbohrkerne, wie man sie bei Tiefbohrungen in der Antarktis und Grönland gewinnt, erhält man so Daten über mehrere Klimazyklen hinweg. So deckt der Bohrkern, der an der russischen Antarktisstation Vostok in den achtziger und neunziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts gezogen wurde, vier Klimazyklen ab, mehr als 420.000 Jahre [36].



**Abbildung 1.2:** Vostok-Bohrkern [36]: Deuteriumkonzentration über die Tiefe in  $\delta D$ .

Aber ganz speziell bei diesen langen Bohrkernen tritt ein großes Problem zu Tage, nämlich das Problem der Datierung, also die Bestimmung der Funktion  $A(D)$ , in der  $A$  das Alter des Eises bezeichnet, das ist die Zeit, die vom Zeitpunkt des Auftreffens des Eispartikels als Schnee auf der Oberfläche bis zur Gegenwart in der Tiefe  $D$  verfloß.

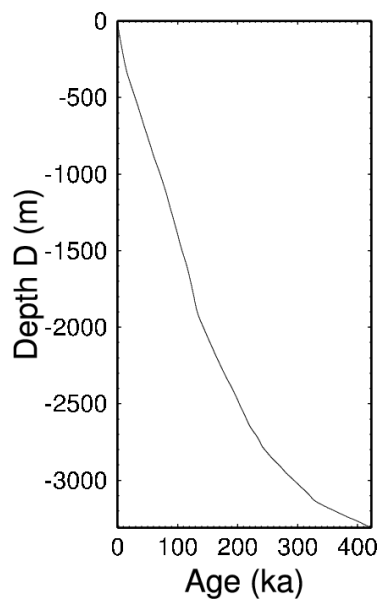
Durch die jahreszeitlichen Änderungen der Temperatur und des Schneefalls bilden sich im Eis der Eisschilde und Gletscher klar unterscheidbare Schichten, vergleichbar der Schichtbildung in Sedimentablagerungen, die man optisch oder durch Messungen, wie zum Beispiel der elektrischen Leitfähigkeit, bestimmen kann. Allerdings kommt es mit zunehmender Tiefe und dem damit zunehmendem Druck zu Vermischungsprozessen einerseits und zur Kompression der Schichten andererseits. So sind im Vostok-Bohrkern Jahresschichten in 150 m Tiefe im Mittel ca. 20 mm dick, in 3000 m aber höchstens noch 2 mm. Daraus resultiert, dass ab einer gewissen Tiefe die einzelnen Schichten erst optisch und dann auch meßtechnisch nicht mehr unterscheidbar sind, und somit eine Datierung einfach durch Abzählen der Jahresschichten nicht mehr möglich ist [1].

Die zeitliche Einordnung der Daten ist aber für die Auswertung und für den Vergleich mit anderen Klimaarchiven, welcher Art diese auch immer sein mögen, zwingend erforderlich.

<sup>1</sup> $\delta D$ : Deuteriumgehalt in Promille des mittleren Deuteriumgehalts von Meerwasser (Standard Mean Ocean Water; SMOW).

So ist die Bestimmung einer Altersverteilung über die Tiefe (siehe Abbildung 1.3) an der Position der Bohrung von ebenso großer Bedeutung wie die Gewinnung und Analyse des Bohrkerns selbst.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Algorithmus auf Basis eines Total Variation Diminishing (TVD) Verfahrens [30] zur Eisalterbestimmung in das Eisschildmodell SICOPOLIS zu implementieren. Der Vorteil einer solchen Altersbestimmung läge darin, dass man nicht nur eine Altersverteilung über die Tiefe an einer bestimmten Position erhält, sondern dass das Altersfeld des gesamten Inlandeises bestimmt wird.



**Abbildung 1.3:** Vostok-Bohrkern [36]: Altersverteilung über die Tiefe.

## 2 Datierung von Eisbohrkernen

Als hydrodynamisches Problem ist die Altersbestimmung des Eises eigentlich einfach. Dazu gibt es im wesentlichen vier Vorgehensweisen, und jede besitzt ihre Tücken.

- Die lokale Methode

Hierbei wird zunächst versucht, durch Messungen und Beobachtungen der Gegebenheiten an der Bohrposition Informationen über das Fließverhalten des Eises und der Schneefallrate zu erhalten [27, 36]. Anschließend wird basierend auf diesen Informationen ein vereinfachtes, im allgemeinen 1-dim oder 2-dim, zeitunabhängiges Modell des Eisfließens formuliert. Mit diesem Modell wird nun die “Thinning Function”, die das Verhältnis von aktueller Schichtdicke zu ursprünglicher Schichtdicke darstellt [11], bestimmt. Und mit ihrer Hilfe läßt sich die Altersverteilung über die Eindringtiefe berechnen.

Die Vorteile eines solchen Vorgehens liegen darin, dass zum Einen, aufgrund des räumlich begrenzten Gebietes, in dem das Eis des Bohrkerns als Schnee auf das Eisschild auftraf, ein genauerer, die Wirklichkeit besser wiedergebender Ansatz für die Schneefallrate formuliert werden kann. Zum Anderen ist es leicht, bereits auf andere Art und Weise datierte Punkte einzufügen, wie den durch stratigraphische Methoden datierten oberen Teil des Bohrkerns oder Punkte die sich durch ein datiertes Ereignis, wie z.B. dem “Last Glacial Maximum” vor 21 000 Jahren, auszeichnen.

Von Nachteil bei diesem Vorgehen ist zum einen die im allgemeinen stark vereinfachte Dynamik, die meist mehr durch auf den wissenschaftlichen Instinkt beruhenden Annahmen und Interpretationen gestützt wird, als durch tatsächliche Physik - wenn auch diese Annahmen und Interpretationen bei der schlechten Datenlage häufig bessere Ergebnisse liefern mögen. Zum anderen kann man die Beschränkung auf eine bestimmte Bohrposition bestenfalls als unbefriedigend bezeichnen.

Auf einer völlig anderen Herangehensweise bauen die drei folgenden Methoden auf. Hierbei wird in einem ersten Rechenschritt zunächst das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  als Funktion von Position  $\mathbf{x}$  und Zeit  $t$  mittels eines hydrodynamischen Modells des Eisschildes berechnet. Ist dieses Feld bekannt, so kann man anschließend das Alter  $A(\mathbf{x}, t)$  des Eises

durch folgende Schritte ermitteln.

- 1. Methode (Lagrangesche Partikelverfolgung)

Man integriert die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

unter den Anfangsbedingungen

$$t = t_0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0. \quad (2.2)$$

Ist  $t_0$  die Zeit bei der ein Eispartikel als Schnee auf den Oberflächenpunkt  $\mathbf{x}_0$  fiel, dann läßt sich durch Integration der Zusammenhang

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.3)$$

ermitteln. Zur Zeit  $t$  ist dann das Alter des Eises im Punkt  $\mathbf{x}$  durch  $A = t - t_0$  gegeben.

Die Schwierigkeiten dieser Methode liegen in der Erzeugung von Alterswerten im gesamten betrachteten Eisschild. Zum einen muß man in regelmäßigen Abständen Eispartikel auf der Oberfläche aufbringen, um überhaupt eine Altersentwicklung zu erhalten. Zum anderen ist durch das Fließverhalten des Eises - die Eispartikel bewegen sich der Schwerkraft folgend nach unten, aber vorallem auch zum Rand des Eisschildes - das Zentrum des Eisschildes nur dünn mit Punkten  $\mathbf{x}$ , an denen das Eisalter bekannt ist, besetzt. Diesem Problem kann man begegnen, indem man immer wieder die Alterswerte von den im Raum beliebig verteilten Punkten  $\mathbf{x}$  auf Punkte  $\tilde{\mathbf{x}}$  interpoliert, deren  $(x, y)$ -Koordinaten den  $x, y$ -Koordinaten der Stützstellen des Rechengitters entsprechen. Anschließend verfolgt man die Teilchen von diesen Punkten  $\tilde{\mathbf{x}}$  aus weiter. Allerdings ist der Rechenaufwand enorm und die häufigen Interpolationen bieten ein großes Fehlerpotential.

- 2. Methode (Eulersche Methode)

Hier geht man von der Gleichung

$$\frac{dA}{dt} = 1, \quad A = A(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

für das Alter aus, die fast trivial integriert werden kann und zu  $A = t - t_0$  führt. De

---

facto muß man die Gleichung (2.4) aber in der Form

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\text{grad } A) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.5)$$

lösen. Dies ist eine hyperbolische partielle Differentialgleichung, deren numerische Integration wegen ihrer Anfälligkeit für numerische Instabilitäten schwierig ist. In dieser Dissertation wird im Detail darauf eingegangen. Die numerische Lösung wird durch ein Total Variation Diminishing (TVD) [30] Verfahren bewerkstelligt, da schon deren einfachste Vertreter, wie zum Beispiel das First Order Upstream Verfahren, kurz UP1 genannt, Stabilität mit einer recht hohen Genauigkeit kombinieren.

- 3. Methode

Man kann das Eisalter auch dadurch bestimmen, dass man die **Isochronenflächen** verfolgt. Um die Evolutionsgleichung dieser Flächen herzuleiten, sei mit

$$z = z_{f_n}(x, y, t) \quad (2.6)$$

die Gleichung einer solchen Fläche bezeichnet. Ihre Evolution kann durch totale Differentiation von  $z_{f_n} - z = 0$  nach der Zeit beschrieben werden,

$$\frac{\partial z_{f_n}}{\partial t} + \frac{\partial z_{f_n}}{\partial x} v_x + \frac{\partial z_{f_n}}{\partial y} v_y - v_z = 0, \quad (2.7)$$

worin  $(v_x, v_y, v_z)$  die  $x, y, z$ -Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes sind. Die Null auf der rechten Seite drückt aus, dass die Isochronenflächen materielle Flächen sind. Die Gleichung (2.7) ist hyperbolisch und beschreibt die Isochronenfläche zur Zeit  $t$ , falls zur Zeit  $t_n < t$   $z_{f_n}$  die Eisoberfläche  $z_s(\mathbf{x})$  für alle Akkumulationspunkte  $\mathbf{x}$  darstellt:

$$z_{f_n}(\mathbf{x}, t_n) = z_s(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Wird Gleichung (2.7) für die Anfangsbedingung (2.8) integriert, so stellt die Fläche  $z_{f_n}(\mathbf{x}, t)$  die Isochronenfläche zur Zeit  $t$  mit dem Alter  $A_n = t - t_n$  dar.

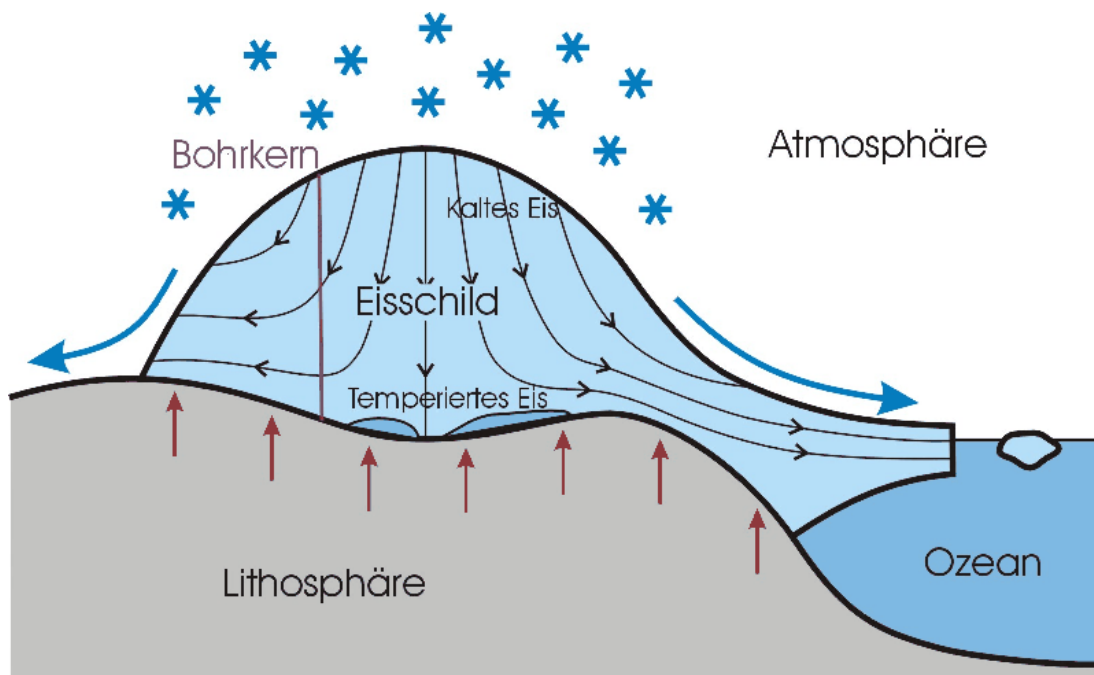
Wegen der Hyperbolizität ist auch für das Anfangswertproblem (2.7), (2.8) die Verwendung eines TVD-Integrationsverfahren angebracht.

Diese Methode stellt im Prinzip eine Kombination der anderen beiden Methoden dar und ist auch die Erfolg versprechenste der drei. Sie ist aber auch, ähnlich wie Methode 1, mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden. Dieser Rechenaufwand ist zwar geringer als bei der Teilchenverfolgung, aber es scheint doch zu diesem Zeitpunkt angebracht, das Potential moderner Computer für eine Verfeinerung des Rechengitters zu nutzen.



### 3 Das Eisschildmodell SICOPOLIS

Das Eisschildmodell SICOPOLIS (SIMulation CODE for POLythermal Ice Sheets), auf dem diese Arbeit aufbaut, ist ein dynamisch/thermodynamisches Modell von auf festem Grund aufliegenden großen Eismassen, den sogenannten Eisschilden, manchmal auch als Inlandeise bezeichnet, wie in Abbildung 3.1 dargestellt.



**Abbildung 3.1:** Schematische Darstellung eines Eisschildes [18, modifiziert].

Ihre schiere Größe unterscheidet solche Eisschilde von den Gletschern der Bergregionen. Während Gletscher nur eine geringe Ausdehnung von einigen Quadratkilometern erreichen, bedecken Eisschilde Flächen von mehreren Millionen Quadratkilometern. Auch unterscheiden sich Eisschilde von den Schelfeisen, wie man sie in der Antarktis findet; bekannteste Vertreter dieser Gattung sind das Ross-Schelfeis und das Ronne-Filchner-Schelfeis, aber auch das durch sein Zerbrechen und Auflösen zu trauriger Berühmtheit gelangte Larsen-Schelfeis. Schelfeise, die auch beträchtliche Größe erreichen können, unterscheiden sich von Eisschilden insofern, dass sie nicht auf dem festen Land aufliegen,

sondern auf dem Ozean aufschwimmen. (Über Schelfeise und ihre Dynamik siehe die Dissertationen M. Weis [42] und A. Humbert [22]).

Eisschilde findet man heutzutage in Grönland und im Inneren des antarktischen Kontinents. Zu verschiedenen Zeiten der Vergangenheit waren aber auch weite Teile Europas und Nordamerikas von solchen Eismassen bedeckt.

Ziel eines solchen Modells ist es, Zustand und Verhalten eines Eisschildes möglichst wirklichkeitsnah zu simulieren, um somit Aussagen über das zukünftige Verhalten von Eisschilden treffen zu können.

SICOPOLIS wurde als FORTRAN-Programm unter Verwendung von Finite-Differenz-Methoden von Prof. R. Greve im Rahmen seiner Doktorarbeit [15] Mitte der neunziger Jahre entwickelt.

Im Folgenden wird die zu Grunde liegende Theorie kurz vorgestellt, und anschließend werden einige Details der Modellbildung, die für die Lösung der Altersgleichung von Bedeutung sind, näher betrachtet.

## 3.1 Theorie

SICOPOLIS ist, wie das Prädikat “polytherm” im Namen schon verrät, ein Modell polythermer Eisschilde (siehe Abbildung 3.1). Das heißt, man trägt der Möglichkeit Rechnung, dass das Eis in zwei verschiedenen Phasen, nämlich als **kaltes und temperiertes Eis**, auftreten kann. Kaltes Eis, dessen Temperatur unter dem druckkorregierten Schmelzpunkt liegt, wird als Einkomponenten-Fluid modelliert, während temperiertes Eis, bei dem die Temperatur mit dem druckkorregierten Schmelzpunkt zusammenfällt und daher einen gewissen Anteil Wasser - man geht dabei von bis zu 5% aus - enthält, als Zweikomponenten-Fluid modelliert wird.

### 3.1.1 Annahmen und Einschränkungen

Um nun die Modellgleichungen eines solchen Eisschildes zu formulieren, werden zwei grundlegende Annahmen getroffen:

- Eis ist ein dichtebeständiges Fluid.

Damit vereinfacht sich die Massenbilanz zu der Aussage

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \quad (3.1)$$

Dies gilt auch für temperiertes Eis, da Dichteschwankungen aufgrund eines sich



ändernden Wasseranteils weniger als 1% betragen und somit vernachlässigt werden können.

- Die aus der Erdrotation folgenden Volumenkräfte, wie z. B. die Corioliskraft, werden, ebenso wie der aus der Massenzufuhr an der Oberfläche entstehende Impulsübertrag, im Vergleich zu der Wirkung der Schwerkraft als verschwindend klein angesehen.

Zur Vereinfachung der Gleichungen werden zusätzlich zwei weitere Einschränkungen getroffen:

- Die in einem Inlandeisschild auftretende horizontale Ausdehnung ist wesentlich größer als die charakteristische Dicke des Eisschildes.

Typische Werte liegen hierbei im Bereich von ein paar tausend Metern für die Eisdicke - im Falle der Antarktis bis zu 4500 m - und im Vergleich dazu mehreren hundert oder gar mehreren tausend Kilometern in der Horizontalen. Für die Antarktis, mit ihrer horizontalen Ausdehnung von etwa 4000 km, ergibt sich somit ein typisches Aspektverhältnis  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Somit rechtfertigt sich in den beschreibenden Gleichungen der Limes des Aspektverhältnisses  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{[H]}{[L]} = \frac{[V_H]}{[V_L]} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

mit den charakteristischen Größen Höhe  $[H]$ , Länge  $[L]$ , Vertikalgeschwindigkeit  $[V_H]$  und Horizontalgeschwindigkeit  $[V_L]$  zu betrachten, so dass alle Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$  mit  $p \geq 1$  vernachlässigt werden können.

Diese Annahme wird im allgemeinen als Flacheisannahme oder auch Shallow-Ice-Approximation (SIA) bezeichnet [23].

- Da in realen Eisschilden die typische Horizontalgeschwindigkeit  $[V_L]$  höchstens 1000 m/a beträgt, ergibt sich für die Froude-Zahl

$$F = \frac{[V_L]^2}{g[L]}, \quad (3.3)$$

welche die Beschleunigung mit der Gravitation ins Verhältnis setzt, Werte in der Größenordnung von  $10^{-10}$  bis  $10^{-15}$ . Es ist daher sinnvoll, auch die Limites

$$F \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{F}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

zu betrachten und alle Terme mit  $F$  und  $F/\varepsilon$  zu vernachlässigen.

### 3.1.2 Vereinfachte Modellgleichungen

Die solcher Maßen modifizierten und vereinfachten Bilanzgleichungen lassen sich zum Teil analytisch integrieren und führen so zu Modellgleichungen, aus denen dann auf numerischem Wege die relevanten Daten berechnet werden können. Diese teilintegrierten Modellgleichungen werden hier in dimensionsbehafteter Form aufgeführt. Ihre Herleitung wird in [15, Kapitel 3 und 5] durchgeführt.

#### Spannungen

Unter Beachtung der Randbedingung der freien Oberfläche ( $p(z = z_s) = 0$ ), ergibt sich aus der Vertikalkomponente der Impulsbilanz durch Integration der Druck

$$p = \rho g(z_s - z), \quad (3.5)$$

wobei  $z = z_s(x, y, t)$  die  $z$ -Koordinate der freien Oberfläche bezeichnet. Der Druck  $p$  unterliegt also einer rein hydrostatischen Verteilung.

Damit lassen sich aus den Horizontalkomponenten der Impulsbilanz die Schubspannungen gewinnen:

$$t_{xz} = -\rho g(z_s - z) \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.6)$$

$$t_{yz} = -\rho g(z_s - z) \frac{\partial z_s}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Für die effektive Schubspannung  $\sigma = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2}$  ergibt sich hiermit

$$\sigma = \rho g(z_s - z) \sqrt{\left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}. \quad (3.8)$$

Diese Gleichungen sind sowohl für den Kalteisbereich wie für den Bereich temperierten Eises gültig. Die noch verbleibenden Spannungen  $t_x^R$ ,  $t_y^R$ ,  $t_z^R$  und  $t_{xy}$  können nicht direkt berechnet werden, werden aber auch im weiteren Verlauf nicht benötigt. Sie lassen sich jedoch bei bekanntem Geschwindigkeitsfeld aus der Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation ermitteln.

#### Geschwindigkeitsfeld

Zunächst werden folgende Konventionen für den Rate-Faktor  $A_{(t)}(\cdot)$ , die Gleitfunktion  $C_{(t)}$  und die Kriechfunktion  $f_{(t)}(\sigma)$  eingeführt:

$$A_{(t)}(\cdot) = \begin{cases} A(T') & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ A_t(\omega) & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}), \end{cases} \quad (3.9)$$

$$C_{(t)} = \begin{cases} C & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ C_t & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}), \end{cases} \quad (3.10)$$

$$f_{(t)}(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ f_t(\sigma) & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}), \end{cases} \quad (3.11)$$

worin  $T'$  die homologe Temperatur,  $\omega$  den Massenanteil von Wasser im temperierten Eis und  $z_m$  die  $z$ -Koordinate der Phasengrenzfläche zwischen kaltem und temperiertem Eis (CTS) bezeichnen. Unter Anwendung dieser Konventionen gelten die folgenden Gleichungen der Horizontalgeschwindigkeiten für kaltes sowie für temperiertes Eis:

$$v_x = -\rho g(z_s - z_b) C_{(t)} \frac{\partial z_s}{\partial x} - 2\rho g \frac{\partial z_s}{\partial x} \int_{z_b}^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(z_s - z') dz', \quad (3.12)$$

$$\rightarrow v_{b,x} = -\rho g(z_s - z_b) C_{(t)} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.13)$$

$$v_y = -\rho g(z_s - z_b) C_{(t)} \frac{\partial z_s}{\partial y} - 2\rho g \frac{\partial z_s}{\partial y} \int_{z_b}^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(z_s - z') dz', \quad (3.14)$$

$$\rightarrow v_{b,y} = -\rho g(z_s - z_b) C_{(t)} \frac{\partial z_s}{\partial y}. \quad (3.15)$$

Mit diesen Ergebnissen für die horizontalen Komponenten der Geschwindigkeit kann man aus der Massenbilanz  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  auch die Vertikalgeschwindigkeit berechnen:

$$v_z = - \int_{z_b}^z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + \frac{\partial z_b}{\partial t} + v_{b,x} \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_{b,y} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (3.16)$$

$$\rightarrow v_{b,z} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + v_{b,x} \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_{b,y} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \quad (3.17)$$

mit dem Enhancement-Faktor im Fließgesetz  $E$ , der  $z$ -Koordinate der Eisbasis  $z_b$  und dem Wassermassenfluß in den Boden  $\dot{m}_b^w$ .

#### Entwicklung der freien Oberfläche

Die vertikale Integration der Massenbilanz von der Basis bis zur Eisoberfläche liefert eine Gleichung, die die zeitliche Evolution der freien Oberfläche beschreibt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(z_s - z_b)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + a_s^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \quad (3.18)$$

wobei der neu eingeführte Massenfluß  $\mathbf{q}$  als

$$(q_x, q_y) := \int_{z_b}^{z_s} (v_x, v_y) dz' \quad (3.19)$$

definiert ist. Es wird also die zeitliche Änderung der Eisdicke  $H$  mit der Divergenz des Massenflusses und der Akkumulations-Ablations-Funktion  $a_s^\perp$  bilanziert.

#### Entwicklung der CTS

Analog zu dem Vorgehen für die freie Oberfläche wird die Evolutionsgleichung für die Grenze zwischen kaltem und temperiertem Eis, der sogenannten “cold-temperated-transition-surface”, kurz CTS, durch vertikale Integration von der Eisbasis bis zu dieser Grenze hergeleitet,

$$\frac{\partial(z_m - z_b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_m} v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_m} v_y dz' + a_m^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (3.20)$$

Es ist zu beachten, dass der Volumenfluß durch die CTS  $a_m^\perp$  keine Inputgröße, sondern eine zu berechnende innere Variable ist. Daher ist diese Gleichung zur Bestimmung der zeitlichen Änderung der CTS-Position wenig geeignet, so dass für die Berechnung ein “Trial-and-Error-Verfahren” benutzt wird. Eine genaue Beschreibung der Vorgehensweise bei der Bestimmung der CTS-Position findet man in [15, Kapitel 6.5].

#### Entwicklung der Lithosphärenoberseite

Die Gleichung für die zeitliche Änderung der Lithosphärenoberseite wird nach Herterich [21] wie folgt angesetzt:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V} \left( z_b - \left( z_{b0} - \frac{\rho}{\rho_a} H \right) \right). \quad (3.21)$$

Dies entspricht, bei einer festen Eishöhe  $H$ , einer exponentiellen Annäherung an die Gleichgewichtsposition der Lithosphärenoberseite mit Eislast, da sich dieses Gleichgewicht nicht instantan, sondern mit einer Verzögerungszeit  $\tau_V$  einstellt. Hierbei bezeichnet  $\rho$  die Dichte des Eises und  $\rho_a$  die Dichte der Asthenosphäre.

#### Temperatur und Wassergehalt

Die Temperaturgleichung im kalten Bereich ergibt sich aus der Energiebilanz unter Vernachlässigung der horizontalen Wärmeleitung im Rahmen der Flacheisannahme,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{2}{\rho c} EA(T') f(\sigma) \sigma^2, \quad (3.22)$$

mit der Wärmeleitzahl  $\kappa$  und der spezifischen Wärme  $c$  von Eis. Man erkennt, dass sowohl die vertikale als auch die horizontale Advektion berücksichtigt werden muß, dass aber nur

der vertikale Wärmefluß in Rechnung gestellt wird.

Im temperierten Bereich ist die Temperatur gleich der druckkorrigierten Schmelztemperatur  $T_M$  und über die Schmelztemperatur bei verschwindendem Druck  $T_0$  und den Clausius-Clapeyron-Gradienten  $\beta$  eindeutig bestimmt,

$$T = T_M = T_0 - \beta(z_s - z). \quad (3.23)$$

Für die Wassergehaltsgleichung im temperierten Bereich liefert die Energiebilanz der Mischung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} = & \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \\ & + \frac{c\beta}{L} \left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_s}{\partial y} - v_z \right) \\ & + \frac{2}{\rho L} EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2 - \frac{1}{\rho} D(\omega), \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei die horizontale Diffusion durch die SIA herausfällt.  $\nu$  bezeichnet die Wasserdiffusivität im temperierten Eis und  $L$  die latente Schmelzwärme für Eis. Zusätzlich wird ein Term  $-\frac{1}{\rho} D(\omega)$  mit der Wasserdrainage-Funktion  $D(\omega)$  eingeführt. Diese Wasserdrainage-Funktion entspricht einer negativen Wasserproduktion, welche einen ad-hoc-Ansatz der Beschreibung der Wasserdrainage aus dem temperierten Bereich in den Boden hinein darstellt.

Eine weitere Temperaturgleichung ergibt sich aus der Energiebilanz der Lithosphäre:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial z_b}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (3.25)$$

Auch hier wurden aufgrund der SIA die horizontalen Diffusionsterme vernachlässigt. Die Größen  $\kappa_r$ ,  $\rho_r$  und  $c_r$  bezeichnen die Wärmeleitfähigkeit, die Dichte und die spezifische Wärme der Lithosphäre.

#### Randbedingungen

Für die kalte freie Oberfläche wird eine Oberflächentemperatur vorgeben,

$$T = T_s(x, y, t). \quad (3.26)$$

Sollte eine temperierte Oberfläche auftreten, was allerdings höchst unwahrscheinlich ist, dann wird der Wassergehalt  $\omega$  oder dessen Normalableitung als Randbedingung verwendet.

An der kalten Eisbasis ergeben sich die Randbedingung zu

$$T_i = T_r, \quad (3.27)$$

$$\kappa \frac{\partial T_i}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} = -v_{b,x} t_{xz} - v_{b,y} t_{yz}, \quad (3.28)$$

wobei die Indizes “i” und “r” Eis bzw. die Lithosphäre bezeichnen. In Gleichung (3.28) verschwinden die Terme auf der rechten Seite, wenn die Haftbedingung erfüllt wird.

Die Randbedingungen an einer temperierten Eisbasis ohne darüberliegende temperierte Schicht lauten

$$T_i = T_r = T_M, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa \frac{\partial T_i}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} + v_{b,x} t_{xz} + v_{b,y} t_{yz} \right\}, \quad (3.30)$$

wohingegen die Randbedingung an einer temperierten Eisbasis mit darüber liegender temperierten Schicht die Form

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial z} = (1 - \omega) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \quad (3.31)$$

$$T_i = T_r = T_M, \quad (3.32)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa \beta - \kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} + v_{b,x} t_{xz} + v_{b,y} t_{yz} \right\} \quad (3.33)$$

annehmen. Da der Wassergehalt  $\omega$  im temperierten Eis als klein angenommen wird, kann im Falle einer vernachlässigbaren Wasserdifusivität  $\nu$  der Wasser-Massenstrom in den Boden  $\dot{m}_b^w$  durch die basale Schmelzrate  $\mathcal{P}_b^w$  ausgedrückt werden und es gilt  $\dot{m}_b^w \approx \mathcal{P}_b^w$ .

An der Lithosphärenunterseite werden nur Wärmeleitprozesse in vertikaler Richtung berücksichtigt, so dass man die Randbedingung

$$\kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} = -q_{\text{geo}}. \quad (3.34)$$

erhält.

#### Übergangsbedingungen an der CTS

Aufgrund des stetigen Temperaturverlaufes über die Phasengrenzschicht CTS gilt

$$T_{ci} = T_{ti} = T_M, \quad (3.35)$$

hierbei bezeichnen die Indizes “ci” und “ti” kaltes bzw. temperiertes Eis.

Für die Übergangsbedingung des Wassergehalts an der CTS folgen, mit einer Fallun-

terscheidung nach Gefrieren, Schmelzen bzw. dem Grenzfall, die folgenden Gleichungen:

$a_m^\perp > 0$  (Schmelzbedingung):

$$\omega_{ti} = 0, \quad \frac{\partial T_{ci}}{\partial z} = \beta, \quad (3.36)$$

$a_m^\perp < 0$  (Gefrierbedingung):

$$\kappa \left( \frac{\partial T_{ci}}{\partial z} - \beta \right) - L\nu \frac{\partial \omega_{ti}}{\partial z} = L\rho \omega_{ti} a_m^\perp, \quad (3.37)$$

$a_m^\perp = 0$  (Grenzfall):

$$\omega_{ti} \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad \frac{\partial T_{ci}}{\partial z} = \beta, \quad (3.38)$$

wobei

$$a_m^\perp = -(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) \quad (3.39)$$

den Eis-Volumenfluß über die CTS darstellt.  $w_x, w_y, w_z$  bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten der Bewegung der CTS, und  $z_m$  ist die  $z$ -Komponente ihrer Position.

## 3.2 Transformation der horizontalen Koordinaten

Bei der Anwendung dieses Modells auf die unterschiedlichen Problemstellungen der verschiedenen Eisschilde der Gegenwart und Vergangenheit wird im allgemeinen das Problem der gekrümmten Erdoberfläche vermieden. Dies erreicht man, in dem das zu betrachtende Gebiet (Grönland, Antarktis, Nördliche Hemisphäre) auf eine Ebene projiziert und die Auswirkungen der Krümmung in den Berechnungen vernachlässigt wird. Hierfür wird üblicherweise die stereographische Projektion [24, 5, 13, 7, 16] verwendet, die für die Abbildung der Antarktis folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} x &= 2R_e K \tan \frac{\theta}{2} \sin(\lambda - \lambda_0), \\ y &= 2R_e K \tan \frac{\theta}{2} \cos(\lambda - \lambda_0), \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit dem Erdradius  $R_e$ , dem Streckparameter

$$K = \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (3.41)$$

und den Längengraden  $\lambda$ . Desweiteren, beschreiben  $\theta = 90^\circ + \varphi$  die Ko-Breite (bezüglich des Südpols),  $\theta_0$  die Position der Projektionsebene bezüglich des Südpols (Ko-Breite), und  $\lambda_0$  definiert die Ausrichtung des kartesischen  $x$ - $y$ -Systems auf der stereographischen Ebene [15].

Im Folgenden wird eine Erweiterung dieses Vorgehens hergeleitet, die es möglich macht, geographische Koordinaten zu verwenden bzw. die Verzerrungen bei der stereographischen Projektion zu berücksichtigen (Greve, pers. comm. 2003).

### 3.2.1 Allgemeines

Seien  $x^1, x^2$  die kontravarianten Koordinaten eines beliebigen orthogonalen Koordinatensystems eines Teilabschnitts einer Kugel. Die kovarianten, lokalen Basisvektoren,  $\mathbf{g}_1$  and  $\mathbf{g}_2$ , werden dann als Ableitungen des Ortsvektors,  $\mathbf{r}$ , bezüglich  $x^1, x^2$  definiert [4]:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \quad (3.42)$$

Daraus ergibt sich der kovariante Metriktensor:

$$(g_{ij}) = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Da die nicht-diagonalen Elemente aufgrund der Orthogonalitätsbedingung verschwinden, erhält man für den kontravarianten Metriktensor

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/g_{11} & 0 \\ 0 & 1/g_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Durch den Metriktensor wird die Länge eines Linienelementes  $ds$  bestimmt:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} dx^j = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.45)$$

Die normierten Basisvektoren,  $\mathbf{e}_1$  and  $\mathbf{e}_2$ , können wie folgt konstruiert werden:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{\|\mathbf{g}_i\|} = \frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i}} = \frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}}. \quad (3.46)$$

Wie in [4] beschrieben, ergibt sich für den Gradienten eines beliebigen skalaren Feldes  $f(x^1, x^2)$ :

$$\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{g}_j, \quad (3.47)$$



und für die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes

$$\mathbf{u}(x^1, x^2) = u^1(x^1, x^2) \mathbf{g}_1 + u^2(x^1, x^2) \mathbf{g}_2 \quad (3.48)$$

folgt:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} u^i)}{\partial x^i}; \quad (3.49)$$

hierbei bezeichnet  $g$  die Determinante von  $(g_{ij})$ ,

$$g = g_{11} g_{22}, \quad (3.50)$$

die als positiv angenommen wird.

Um die Gleichungen (3.47) und (3.49) in einem physikalischen Kontext zu betrachten, benötigt man die Vektoren  $\operatorname{grad} f$  und  $\mathbf{u}$  bezüglich der normierten Basis. Die Gleichungen (3.43), (3.44) und (3.46) führen so zu der folgenden Form der Gleichung (3.47)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= g^{11} \sqrt{g_{11}} \frac{\partial f}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + g^{22} \sqrt{g_{22}} \frac{\partial f}{\partial x^2} \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial f}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial f}{\partial x^2} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die physikalische Form von  $\mathbf{u}$  ist definiert als

$$\mathbf{u} = u^{*1} \mathbf{e}_1 + u^{*2} \mathbf{e}_2, \quad (3.52)$$

und daraus folgt mit Gleichung (3.46) und (3.48)

$$u^{*i} = u^i \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{Keine Summation}). \quad (3.53)$$

Setzt man dies nun in Gleichung (3.49) ein, erhält man

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left( \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} u^{*1})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} u^{*2})}{\partial x^2} \right). \quad (3.54)$$

Mit (3.51) und (3.54) sind  $\operatorname{grad} f$  und  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  in den physikalischen Komponenten ausgedrückt.

### 3.2.2 Geographische Koordinaten

Das auf der Erdoberfläche üblicherweise benutzte orthogonale Koordinatensystem ist das der geographischen Koordinaten, mit Längengraden  $\lambda$  im Bereich von  $-180^\circ \dots +180^\circ$

(180°W ... 180°E) und Breitengraden  $\varphi$  mit dem Intervall  $+90^\circ \dots -90^\circ$  (90°N ... 90°S), wobei die Erdoberfläche als Kugel mit dem Radius  $R_e = 6371.225$  km approximiert wird.

In geographischen Koordinaten wird jedes Linienelement  $ds$  durch

$$ds^2 = R_e^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + R_e^2 d\varphi^2, \quad (3.55)$$

beschrieben, so dass mit Gleichung (3.45)

$$g_{11} = R_e^2 \cos^2 \varphi, \quad g_{22} = R_e^2 \quad (3.56)$$

folgt. Daraus ergibt sich

$$\text{grad } f = \frac{1}{R_e} \left( \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right). \quad (3.57)$$

Bezeichnet man  $u^{*1}$  mit  $u_\varphi$  und  $u^{*2}$  mit  $u_\lambda$ , so folgt

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{R_e \cos \varphi} \left( \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\cos \varphi u_\varphi)}{\partial \varphi} \right). \quad (3.58)$$

Obwohl dies ein in der Atmosphären- und Ozean-Modellierung weitverbreitetes Koordinatensystem ist, besitzt es doch einen entscheidenden Nachteil. In der Nähe der Pole  $\varphi = \pm 90^\circ$  konvergieren die Meridiane (die Linien konstanter Länge) und führen somit zu einer Singularität an den Polen selbst.

Mathematisch wird dies deutlich, wenn man den Metriktensor betrachtet:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm 90^\circ} g_{22} = 0. \quad (3.59)$$

An dieser Stelle sind die Ausdrücke (3.57) und (3.58) nicht länger definiert.

### 3.2.3 Stereographisch erweiterte kartesische Koordinaten

Es wird nun die stereographische Projektion benutzt, um ein orthogonales Gitter auf der Oberfläche der Erde zu erzeugen, das an den Polen nicht singulär wird (diese Koordinaten werden als “stereographisch erweiterte kartesische Koordinaten” bezeichnet, oder kurz “SEC Koordinaten”). Dies wird erreicht, indem man die kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  in der stereographischen Ebene mit der inversen, stereographischen Projektion (3.40) zurück auf die Sphäre abbildet. Um zu zeigen, dass dieses Vorgehen wirklich orthogonale Koordinaten auf der Kugel erzeugt, wird nun ein Ausdruck für das Linienelement  $ds$

hergeleitet. Aus Gleichung (3.40) folgt, mit  $h(\theta) := \tan(\theta/2)$  und der Ableitung  $h'(\theta)$ ,

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2R_e K \begin{pmatrix} h'(\theta) \sin(\lambda - \lambda_0) & h(\theta) \cos(\lambda - \lambda_0) \\ h'(\theta) \cos(\lambda - \lambda_0) & -h(\theta) \sin(\lambda - \lambda_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\lambda \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

und daher,

$$\begin{pmatrix} d\theta \\ d\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{2R_e K h(\theta) h'(\theta)} \begin{pmatrix} h(\theta) \sin(\lambda - \lambda_0) & h(\theta) \cos(\lambda - \lambda_0) \\ h'(\theta) \cos(\lambda - \lambda_0) & -h'(\theta) \sin(\lambda - \lambda_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Mit Gleichung (3.55), folgt unter Berücksichtigung von  $\cos \varphi = \sin \theta$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= R_e^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\lambda^2) \\ &= \frac{1}{4K^2 h^2(\theta) h'^2(\theta)} \\ &\quad \times \{ (h^2(\theta) \sin^2(\lambda - \lambda_0) + h'^2(\theta) \sin^2 \theta \cos^2(\lambda - \lambda_0)) dx^2 \\ &\quad + (h^2(\theta) \cos^2(\lambda - \lambda_0) + h'^2(\theta) \sin^2 \theta \sin^2(\lambda - \lambda_0)) dy^2 \\ &\quad + (2[h^2(\theta) - \sin^2 \theta h'^2(\theta)] \sin(\lambda - \lambda_0) \cos(\lambda - \lambda_0)) dx dy \}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Da mit

$$h^2(\theta) - \sin^2 \theta h'^2(\theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2}{(2 \cos^2 \frac{\theta}{2})^2} = 0 \quad (3.63)$$

der Anteil des gemischten, zu  $dx dy$  proportionalen Terms verschwindet, was die angenommene Orthogonalität beweist, vereinfacht sich der Ausdruck (3.62) zu

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{4K^2 h'^2(\theta)} = \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2} (dx^2 + dy^2) = \frac{dx^2 + dy^2}{K^2 (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})^2}. \quad (3.64)$$

Wendet man die Transformation (3.40) an, kann man die Ko-Breite eliminieren:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{K^2 \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{(2R_e K)^2} \right)^2}. \quad (3.65)$$

Aus diesem Ergebnis kann man auf den Metriktensor der SEC-Koordinaten schließen:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2} = \frac{1}{K^2 \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{(2R_e K)^2} \right)^2}. \quad (3.66)$$

So erhält man aus Gleichung (3.51),

$$\text{grad } f = \frac{K}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y \right), \quad (3.67)$$

und, wenn man  $u^{*1}$  durch  $u_x$  und  $u^{*2}$  durch  $u_y$  ersetzt, ergibt sich aus Gleichung (3.54)

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} \left( \frac{\partial(\cos^2 \frac{\theta}{2} u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\cos^2 \frac{\theta}{2} u_y)}{\partial y} \right), \quad (3.68)$$

worin

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{(2R_e K)^2}\right)} \quad (3.69)$$

wieder durch  $(x, y)$  ausgedrückt werden kann, siehe (3.64) und (3.65).

Im Gegensatz zum geographischen Koordinatensystem aus Längen und Breiten weist das SEC-Koordinatensystem keine Singularität am Pol auf und kann somit in der gesamten Südlichen Hemisphäre angewendet werden. Am Nordpol ( $\varphi = 90^\circ$ , entsprechend  $\theta = 180^\circ$ ) hingegen, verschwinden  $g_{11}$  und  $g_{22}$ , so dass die Transformation (3.40) in der Nordhemisphäre nicht gültig ist. Stattdessen wird die Ko-Breite bezüglich des Nordpols eingeführt,  $\tilde{\theta} = 90^\circ - \varphi$ . Hierfür schreibt man Gleichung (3.40) mit  $\tilde{\theta}$  statt  $\theta$  und erhält

$$\begin{aligned} x &= 2R_e K \tan \frac{\tilde{\theta}}{2} \sin(\lambda - \lambda_0), \\ y &= -2R_e K \tan \frac{\tilde{\theta}}{2} \cos(\lambda - \lambda_0), \end{aligned} \quad (3.70)$$

mit

$$K = \cos^2 \frac{\tilde{\theta}_0}{2}. \quad (3.71)$$

Um die gewohnte Sicht von Oben sicherzustellen, wird die zweite Gleichung aus (3.70) um ein Minuszeichen ergänzt. Überführt man die erhaltenen Koordinaten wieder auf die Kugel, so erhält man ein orthogonales System, dessen Singularität sich am Südpol befindet, so dass es für die nördliche Hemisphäre anwendbar ist.

### 3.2.4 Stereographische Erweiterung von krummlinigen, rechtwinkligen Koordinaten

Die Erweiterung von orthogonalen Koordinatensystemen in der stereographischen Ebene auf die Erdoberfläche mittels umgekehrter stereographischer Projektion ist nicht notwendigerweise auf kartesische Koordinaten beschränkt, wie oben hergeleitet. Es ist ebenfalls möglich ein *krummliniges* rechtwinkliges Koordinatensystem in der stereographischen Ebene zu erzeugen, zum Beispiel durch eine konforme Transformation des ursprünglichen kartesischen Gitters und Rückführung dieses Systems auf die Kugel.

Seien  $ds_{\text{st}}$  die Länge eines Linienelements und  $(g_{\text{st}})_{11}$ ,  $(g_{\text{st}})_{22}$  die Komponenten des Metrikensors in der stereographischen Ebene, dann gilt

$$(ds_{\text{st}})^2 = (g_{\text{st}})_{11} (dx^1)^2 + (g_{\text{st}})_{22} (dx^2)^2. \quad (3.72)$$

Mit Gleichung (3.64) führt dies auf das entsprechende Linienelement auf der Kugel

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2} (ds_{\text{st}})^2 \\ &= \frac{(g_{\text{st}})_{11} \cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2} (dx^1)^2 + \frac{(g_{\text{st}})_{22} \cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2} (dx^2)^2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

es gilt daher für den Metrikensor

$$g_{11} = \frac{(g_{\text{st}})_{11} \cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2}, \quad g_{22} = \frac{(g_{\text{st}})_{22} \cos^4 \frac{\theta}{2}}{K^2}. \quad (3.74)$$

Eine mögliche Anwendung dieses Verfahrens ist die Erzeugung von Gittern mit feinerer Auflösung in Gebieten besonderen Interesses, wie Eisströme und in der Umgebung von Bohrungen.

### 3.2.5 Teiltransformierte Modellgleichungen

Nun werden die in Kapitel [3.1.2] vorgestellten Modellgleichungen der Transformation in ein allgemeines, orthogonales Koordinatensystem auf der Erdoberfläche unterworfen. Hierfür werden die horizontalen Gradienten und Divergenzen gemäß Gleichung (3.47) und Gleichung (3.49) umgeformt. Die vertikale Koordinate  $z$  wird als kartesisch betrachtet, was durch die Flachheitsannahme gerechtfertigt ist (siehe [6]). Die Koordinaten  $x^1$  und  $x^2$  werden durch  $x$  und  $y$  ersetzt, analog werden die Vektorkomponenten  $u^{*1}$  und  $u^{*2}$  durch  $u_x$  und  $u_y$  ersetzt. Die so transformierten Modellgleichungen lauten:

### Spannungen

$$p = \rho g(z_s - z), \quad (3.75)$$

$$t_{xz} = -\frac{\rho g(z_s - z)}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.76)$$

$$t_{yz} = -\frac{\rho g(z_s - z)}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (3.77)$$

$$\sigma = \rho g(z_s - z) \sqrt{\frac{1}{g_{11}} \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2}. \quad (3.78)$$

### Geschwindigkeitsfeld

$$v_x = -\frac{\rho g(z_s - z_b)C_{(t)}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{2\rho g}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} \int_{z_b}^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(z_s - z') dz', \quad (3.79)$$

$$\rightarrow v_{b,x} = -\frac{\rho g(z_s - z_b)C_{(t)}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.80)$$

$$v_y = -\frac{\rho g(z_s - z_b)C_{(t)}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{2\rho g}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} \int_{z_b}^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(z_s - z') dz', \quad (3.81)$$

$$\rightarrow v_{b,y} = -\frac{\rho g(z_s - z_b)C_{(t)}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} v_z = & -\frac{1}{\sqrt{g_{11}} g_{22}} \int_{z_b}^z \left( \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} v_y)}{\partial y} \right) dz' \\ & + \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{v_{b,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{v_{b,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\rightarrow v_{b,z} = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{v_{b,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{v_{b,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (3.84)$$

### Entwicklung der freien Oberfläche

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}} g_{22}} \left( \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} q_y)}{\partial y} \right) + a_s^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \quad (3.85)$$

mit

$$(q_x, q_y) := \int_{z_b}^{z_s} (v_x, v_y) dz'. \quad (3.86)$$

### Entwicklung der CTS

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z_m - z_b)}{\partial t} = & - \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{g_{22}} \int_{z_b}^{z_m} v_x dz') + \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{g_{11}} \int_{z_b}^{z_m} v_y dz') \right) \\ & + a_m^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

### Entwicklung der Lithosphärenoberseite

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = - \frac{1}{\tau_V} \left( z_b - (z_{b0} - \frac{\rho}{\rho_a} H) \right), \quad (3.88)$$

### Temperatur und Wassergehalt

*Temperatur im kalten Bereich:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_x}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_y}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{2}{\rho c} EA(T') f(\sigma) \sigma^2, \quad (3.89)$$

*Temperatur im temperierten Bereich:*

$$T = T_M = T_0 - \beta(z_s - z). \quad (3.90)$$

*Wassergehalt im temperierten Bereich:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{v_x}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{v_y}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} = & \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \\ & + \frac{c\beta}{L} \left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{v_x}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{v_y}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} - v_z \right) \\ & + \frac{2}{\rho L} EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2 - \frac{1}{\rho} D(\omega). \end{aligned} \quad (3.91)$$

*Temperaturgleichung für die Lithosphäre:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial z_b}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (3.92)$$

### Randbedingungen

*Kalte freie Oberfläche:*

$$T = T_s(x, y, t), \quad (3.93)$$

*Kalte Eisbasis:*

$$T_i = T_r, \quad (3.94)$$

$$\kappa \frac{\partial T_i}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} = -v_{b,x} t_{b,xz} - v_{b,y} t_{b,yz}. \quad (3.95)$$

*Temperierte Eisbasis ohne darüberliegende temperierte Schicht:*

$$T_i = T_r = T_M, \quad (3.96)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa \frac{\partial T_i}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} + v_{b,x} t_{xz} + v_{b,y} t_{yz} \right\}. \quad (3.97)$$

*Temperierten Eisbasis mit darüber liegender Schicht:*

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial z} = (1 - \omega) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \quad (3.98)$$

$$T_i = T_r = T_M, \quad (3.99)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa \beta - \kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} + v_{b,x} t_{xz} + v_{b,y} t_{yz} \right\}. \quad (3.100)$$

*Lithosphärenunterseite:*

$$\kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} = -q_{\text{geo}}. \quad (3.101)$$

Übergangsbedingungen an der CTS

$$T_{ci} = T_{ti} = T_M, \quad (3.102)$$

$a_m^\perp > 0$  (Schmelzbedingung):

$$\omega_{ti} = 0, \quad \frac{\partial T_{ci}}{\partial z} = \beta, \quad (3.103)$$

$a_m^\perp < 0$  (Gefrierbedingung):

$$\kappa \left( \frac{\partial T_{ci}}{\partial z} - \beta \right) - L\nu \frac{\partial \omega_{ti}}{\partial z} = L\rho \omega_{ti} a_m^\perp, \quad (3.104)$$

$a_m^\perp = 0$  (Grenzfall):

$$\omega_{ti} \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad \frac{\partial T_{ci}}{\partial z} = \beta. \quad (3.105)$$



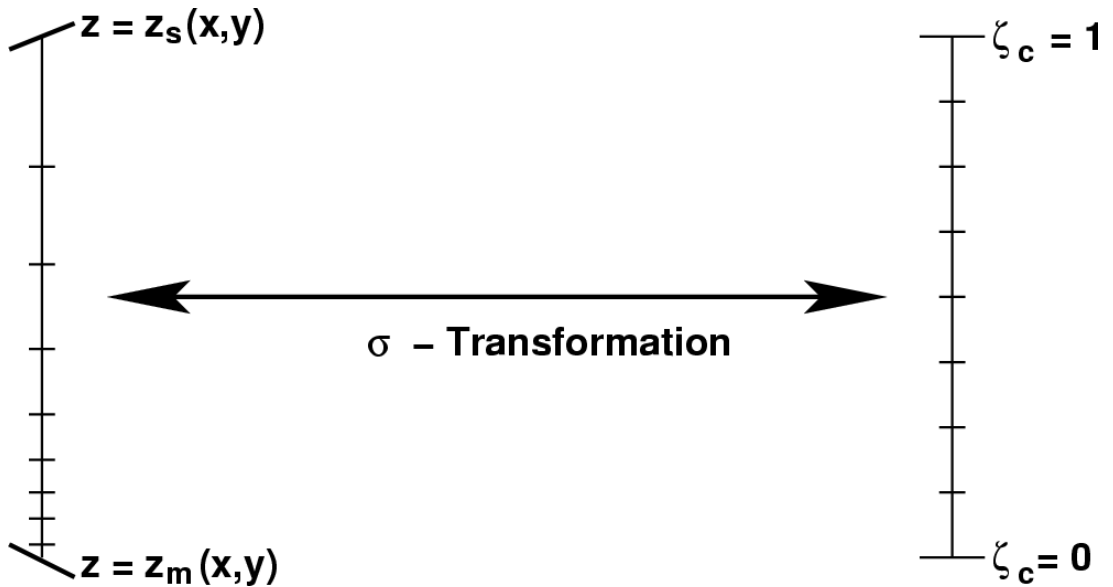
Eis-Volumenfluß über die CTS:

$$a_m^\perp = -\frac{w_x - v_{w,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{w_y - v_{w,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}). \quad (3.106)$$

### 3.3 Transformation der vertikalen Koordinate

Die drei Bereiche (i) kaltes Eis, (ii) temperiertes Eis und (iii) Lithosphäre werden jeder für sich in vertikaler Richtung der  $\sigma$ -Transformation unterworfen, d.h. auf das Einheitsintervall  $[0,1]$  abgebildet [15, Kapitel 6.1].

Da für die Bestimmung einer eventuell auftretenden CTS eine genaue Berechnung des Temperaturgradienten in Bodennähe nötig ist, wird im Kalteisbereich zusätzlich eine exponentielle Streckung durchgeführt, somit baut das äquidistante Gitter im Raum der  $\sigma$ -Koordinaten ein sich nach unten verdichtendes Gitter im physikalischen Raum auf (Abb. 3.2). Man erhält somit an der Unterseite des Kalteisbereiches eine genauere räumliche Auflösung.



**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung der  $\sigma$ -Transformation für den Kalteisbereich, d.h. mit exponentieller Streckung.

Ziel dieser Transformation ist es, eine vollständige Belegung des Gitters in vertikaler Richtung zu gewährleisten. Insbesondere wird dafür gesorgt, dass die freie Oberfläche, die CTS, die Lithosphärenoberseite und deren Unterseite stets mit Gitterpunkten des numerischen Gitters besetzt sind.

### 3.3.1 $\sigma$ -Transformation

Der physikalische Raum  $(x, y, z)$  wird auf den Rechenraum  $(\xi, \eta, \zeta)$  abgebildet. Die Transformationsregeln für die einzelnen Bereiche lauten:

- Im Bereich kalten Eises:

$$x = \xi_c, \quad y = \eta_c, \quad \frac{z - z_m}{H_c} = \frac{e^{a\zeta_c} - 1}{e^a - 1} =: \mathcal{E}(\zeta_c), \quad t = \tau_c. \quad (3.107)$$

- Im Bereich temperierten Eises:

$$x = \xi_t, \quad y = \eta_t, \quad \frac{z - z_b}{H_t} = \zeta_t, \quad t = \tau_t. \quad (3.108)$$

- Für die Lithosphäre:

$$x = \xi_r, \quad y = \eta_r, \quad \frac{z - z_{b_r}}{H_r} = \zeta_r, \quad t = \tau_r. \quad (3.109)$$

Hier stellt  $a$  den Streckparameter dar, und die Indizes “c”, “t” und “r” markieren die Variablen für kaltes Eis, temperiertes Eis und die Lithosphäre.

Die Transformationsregeln für Ableitungen und vertikale Integrale ergeben sich aus der Anwendung der Kettenregel für Differentiation und der Substitutionsregel der Integration.

Mit  $(m, \mu_{c,t,r})$  als Platzhalter für eines der Wertepaare aus physikalischer Größe und  $\sigma$ -transformierter Größe  $(x, \xi_{c,t,r}), (y, \eta_{c,t,r}), (t, \tau_{c,t,r})$  folgt

für den Bereich kalten Eises

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} &= \frac{\partial}{\partial \mu_c} + \frac{\partial \zeta_c}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_c} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_c} - \frac{1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \left( (e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial m} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_c}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_c}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_c} = \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial}{\partial \zeta_c}, \quad (3.111)$$

$$\int (\cdot) dz' = \int (\cdot) \frac{H_c a e^{a\zeta_c}}{e^a - 1} d\zeta_c, \quad (3.112)$$

für den Bereich temperierten Eises

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu_t} + \frac{\partial \zeta_t}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_t} = \frac{\partial}{\partial \mu_t} - \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial m} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_t}, \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_t} = \frac{1}{H_t} \frac{\partial}{\partial \zeta_t}, \quad (3.114)$$

$$\int (\cdot) dz' = \int (\cdot) H_t d\zeta_t, \quad (3.115)$$

und für die Lithosphäre

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} + \frac{\partial \zeta_r}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} - \frac{1}{H_r} \left( \frac{\partial z_b}{\partial m} + \zeta_r \frac{\partial H_r}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_r}, \quad (3.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} = \frac{1}{H_r} \frac{\partial}{\partial \zeta_r}, \quad (3.117)$$

$$\int (\cdot) dz' = \int (\cdot) H_r d\zeta_r. \quad (3.118)$$

### 3.3.2 Volltransformierte Modellgleichungen

Mit Hilfe der oben formulierten Transformationsregeln können nun die teiltransformierten Modellgleichungen aus Kapitel [3.2.5] zusätzlich auf  $\sigma$ -Koordinaten transformiert werden. Hierfür ist zu beachten, dass die kartesischen Komponenten der Vektoren und Tensoren (z.B.  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{T}$ ) bei der Transformation wie skalare Größen betrachtet werden, und nicht in den Einheitsvektoren des krummlinigen, nicht-orthogonalen  $\sigma$ -Koordinatensystems dargestellt werden. Desweiteren ergeben sich bei der Transformation von Ableitungen von nicht  $z$ -abhängigen Größen, wie der Höhe der freien Oberfläche  $z_s$  oder der Dicke des kalten Eises  $H_c$ , keine Zusatzterme (z. B. gilt  $(\partial z_s / \partial x) = (\partial z_s / \partial \xi_c)$ ), der Einfachheit halber werden solche Terme weiterhin mit kartesischen Koordinaten geschrieben. Die Abhängigkeit der Wärmeleitzahl von Eis  $\kappa$  und der spezifischen Wärme von Eis  $c$  von der Temperatur  $T$  wird explizit aufgeführt.

Spannungen, kalter Bereich:

$$p_c = \rho g H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)), \quad (3.119)$$

$$t_{c,xz} = -\frac{\rho g}{\sqrt{g_{11}}} H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)) \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.120)$$

$$t_{c,yz} = -\frac{\rho g}{\sqrt{g_{22}}} H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)) \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (3.121)$$

$$\sigma_c = \rho g H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)) \sqrt{\frac{1}{g_{11}} \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2}. \quad (3.122)$$

Spannungen, temperierter Bereich:

$$p_t = \rho g (H_c + H_t(1 - \zeta_t)), \quad (3.123)$$

$$t_{t,xz} = -\frac{\rho g}{\sqrt{g_{11}}} (H_c + H_t(1 - \zeta_t)) \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.124)$$

$$t_{t,yz} = -\frac{\rho g}{\sqrt{g_{22}}} (H_c + H_t(1 - \zeta_t)) \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (3.125)$$

$$\sigma_t = \rho g (H_c + H_t(1 - \zeta_t)) \sqrt{\frac{1}{g_{11}} \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} \right)^2}. \quad (3.126)$$

Geschwindigkeit, kalter Bereich:

$$v_{c,x} = v_x(z_m) - \frac{2\rho g}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} \frac{H_c^2 a}{e^a - 1} \int_0^{\zeta_c} EA(T'_c) f(\sigma) (1 - \mathcal{E}(\zeta'_c)) e^{a\zeta'_c} d\zeta'_c, \quad (3.127)$$

$$v_{c,y} = v_y(z_m) - \frac{2\rho g}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} \frac{H_c^2 a}{e^a - 1} \int_0^{\zeta_c} EA(T'_c) f(\sigma) (1 - \mathcal{E}(\zeta'_c)) e^{a\zeta'_c} d\zeta'_c, \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} v_{c,z} = v_z(z_m) - \frac{1}{\sqrt{g_{11}} g_{22}} \int_0^{\zeta_c} \left\{ \frac{H_c a e^{a\zeta'_c}}{e^a - 1} \left( \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} v_{c,x})}{\partial \xi_c} + \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} v_{c,y})}{\partial \eta_c} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial z_m}{\partial x} + \mathcal{E}(\zeta'_c) \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} v_{c,x})}{\partial \zeta'_c} \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial z_m}{\partial y} + \mathcal{E}(\zeta'_c) \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} v_{c,y})}{\partial \zeta'_c} \right\} d\zeta'_c. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Geschwindigkeit, temperierter Bereich:

$$v_{t,x} = -\frac{\rho g (z_s - z_b) C_t}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{2\rho g}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} H_t \int_0^{\zeta_t} EA_t(\omega_t) f_t(\sigma) (H_c + H_t(1 - \zeta'_t)) d\zeta'_t, \quad (3.130)$$

$$\rightarrow v_{b,x} = -\frac{\rho g (z_s - z_b) C_t}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad (3.131)$$

$$v_{t,y} = -\frac{\rho g (z_s - z_b) C_t}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{2\rho g}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} H_t \int_0^{\zeta_t} EA_t(\omega_t) f_t(\sigma) (H_c + H_t(1 - \zeta'_t)) d\zeta'_t, \quad (3.132)$$

$$\rightarrow v_{b,y} = -\frac{\rho g (z_s - z_b) C_t}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned}
 v_{t,z} = & -\frac{1}{\sqrt{g_{11}} g_{22}} \int_0^{\zeta_t} \left\{ H_t \left( \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} v_{t,x})}{\partial \xi_t} + \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} v_{t,y})}{\partial \eta_t} \right) \right. \\
 & - \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \zeta'_t \frac{\partial H_t}{\partial x} \right) \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} v_{t,x})}{\partial \zeta'_t} - \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} + \zeta'_t \frac{\partial H_t}{\partial y} \right) \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} v_{t,y})}{\partial \zeta'_t} \Big\} d\zeta'_t \\
 & + \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{v_{b,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{v_{b,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}.
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Entwicklung der freien Oberfläche:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}} g_{22}} \left( \frac{\partial(\sqrt{g_{22}} q_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\sqrt{g_{11}} q_y)}{\partial y} \right) + a_s^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \tag{3.135}$$

mit

$$(q_x, q_y) = H_t \int_0^1 (v_{t,x}, v_{t,y}) d\zeta'_t + \frac{H_c a}{e^a - 1} \int_0^1 (v_{c,x}, v_{c,y}) e^{a\zeta'_c} d\zeta'_c. \tag{3.136}$$

Entwicklung der CTS:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(z_m - z_b)}{\partial t} &= \frac{\partial H_t}{\partial t} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{g_{11}} g_{22}} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{g_{22}} H_t \int_0^1 v_{t,x} d\zeta'_t) + \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{g_{11}} H_t \int_0^1 v_{c,y} d\zeta'_t) \right) \\
 &\quad + a_m^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}.
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Entwicklung der Lithosphärenoberseite:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V} \left( z_b - \left( z_{b0} - \frac{\rho}{\rho_a} H \right) \right). \tag{3.138}$$

### Temperatur und Wassergehalt

*Temperatur im kalten Bereich:*

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T_c}{\partial \tau_c} + \frac{v_{c,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial T_c}{\partial \xi_c} + \frac{v_{c,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial T_c}{\partial \eta_c} \\
 & + \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} \left\{ \frac{v_{c,z}}{H_c a e^{a\zeta_c}} (e^a - 1) - \frac{1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \left( (e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial t} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) \right. \\
 & \quad - \frac{v_{c,x}}{\sqrt{g_{11}} H_c a e^{a\zeta_c}} \left( (e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial x} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \\
 & \quad \left. - \frac{v_{c,y}}{\sqrt{g_{22}} H_c a e^{a\zeta_c}} \left( (e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \right\} \\
 & = \frac{e^a - 1}{\rho c(T_c) H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial}{\partial \zeta_c} \left( \kappa(T_c) \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} \right) \\
 & \quad + \frac{2}{\rho c(T_c)} E A(T'_c) f(\sigma) \sigma^2.
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

*Schmelztemperatur, kalter Bereich:*

$$T_{M,c} = T_0 - \beta H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)). \tag{3.140}$$

*Temperatur im temperierter Bereich:*

$$T_t = T_{M,t} = T_0 - \beta (H_c + H_t (1 - \zeta_t)). \tag{3.141}$$

*Wassergehalt im temperierten Bereich:*

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \omega_t}{\partial \tau_t} + \frac{v_{t,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \omega_t}{\partial \xi_t} + \frac{v_{t,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \omega_t}{\partial \eta_t} \\
 & + \frac{\omega_t}{\zeta_t} \left\{ \frac{v_{t,z}}{H_t} - \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) \right. \\
 & \quad - \frac{v_{t,x}}{\sqrt{g_{11}} H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial x} \right) - \frac{v_{t,y}}{\sqrt{g_{22}} H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial y} \right) \Big\} \\
 & = \frac{\nu}{\rho H_t^2} \frac{\partial^2 \omega_t}{\partial \zeta_t^2} + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa(T_{M,t})}{\partial T} \\
 & \quad + \frac{c(T_{M,t}) \beta}{L} \left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{v_{c,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{v_{c,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_s}{\partial y} - v_{t,z} \right) \\
 & \quad + \frac{2}{\rho L} E A_t(\omega_t) f_t(\sigma) \sigma^2 - \frac{1}{\rho} D(\omega_t).
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

*Temperaturgleichung für die Lithosphäre:*

$$\frac{\partial T_r}{\partial \tau_r} + \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} \left\{ \frac{1}{H_r} \frac{\partial z_b}{\partial t} - \frac{1}{H_r} \left( \frac{\partial z_{b_r}}{\partial t} + \zeta_r \frac{\partial H_r}{\partial t} \right) \right\} = \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r H_r^2} \frac{\partial^2 T_r}{\partial \zeta_r^2}. \quad (3.143)$$

Randbedingungen

*Kalte freie Oberfläche:*

$$T_c = T_s(x, y, t). \quad (3.144)$$

*Kalte Eisbasis:*

$$T_c = T_r, \quad (3.145)$$

$$\kappa(T_c) \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} - \frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} = -v_{b,x} t_{b,xz} - v_{b,y} t_{b,yz}. \quad (3.146)$$

*Temperierte Eisbasis ohne darüberliegende temperierte Schicht:*

$$T_c = T_r = T_{M,c}, \quad (3.147)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa(T_c) \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} - \frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} - v_{b,x} \frac{\rho g}{\sqrt{g_{11}}} H_c \frac{\partial z_s}{\partial x} - v_{b,y} \frac{\rho g}{\sqrt{g_{22}}} H_c \frac{\partial z_s}{\partial y} \right\}. \quad (3.148)$$

*Temperierte Eisbasis mit darüber liegender Schicht:*

$$T_t = T_r = T_{M,t}, \quad (3.149)$$

$$\frac{\nu}{H_t} \frac{\partial \omega_t}{\partial \zeta_t} = (1 - \omega_t) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \quad (3.150)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa(T_t) \beta - \frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} - v_{b,x} \frac{\rho g}{\sqrt{g_{11}}} H \frac{\partial z_s}{\partial x} - v_{b,y} \frac{\rho g}{\sqrt{g_{22}}} H \frac{\partial z_s}{\partial y} \right\}. \quad (3.151)$$

*Lithosphärenunterseite:*

$$\frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} = -q_{\text{geo}}. \quad (3.152)$$

Übergangsbedingungen an der CTS

$$T_c = T_t = T_{M,t}, \quad (3.153)$$

$a_m^\perp > 0$  (Schmelzbedingung):

$$\omega_t = 0, \quad \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} = \beta, \quad (3.154)$$

$a_m^\perp < 0$  (Gefrierbedingung):

$$\kappa(T_c) \left( \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} - \beta \right) - \frac{L\nu}{H_t} \frac{\partial \omega_t}{\partial \zeta_t} = L\rho\omega_t a_m^\perp, \quad (3.155)$$

$a_m^\perp = 0$  (Grenzfall):

$$\omega_t \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} = \beta. \quad (3.156)$$

Eis-Volumenfluß über die CTS:

$$a_m^\perp = -\frac{w_x - v_{w,x}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{w_y - v_{w,y}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) \quad (3.157)$$

Der Fall  $a_m^\perp = 0$  ist bei numerischen Berechnungen nicht von Bedeutung, da exakte Gleichheit beim Rechnen mit Gleitkommazahlen nicht auftritt. Er wird daher im folgenden nicht mehr betrachtet.

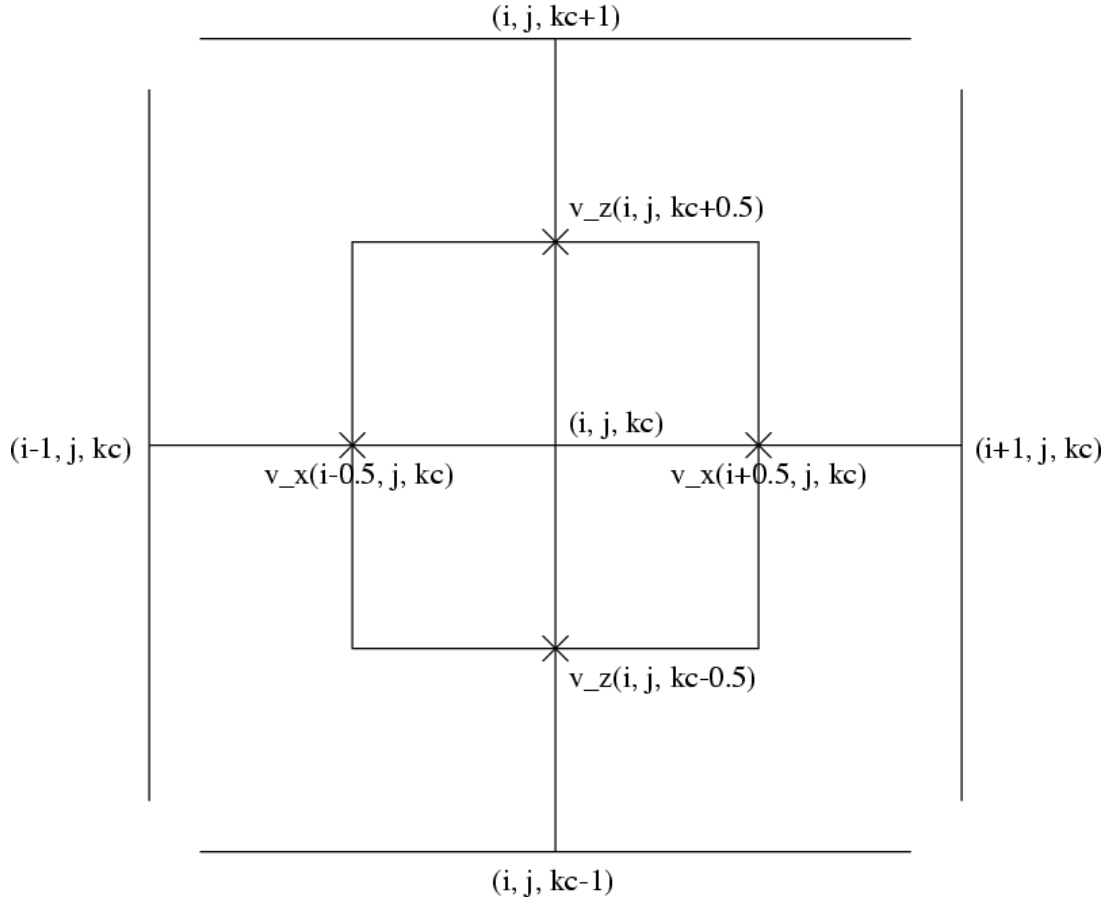
### 3.4 Das numerische Gitter

Zur numerischen Lösung der transformierten Modellgleichungen wird ein im Raum der  $\sigma$ -Koordinaten äquidistantes Gitter eingeführt. Dessen Diskretisierung in Raum und Zeit lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} x_i &= (\xi_c)_i = (\xi_t)_i = (\xi_r)_i = x_0 + i \Delta x \text{ mit } i = 0 \dots i_{\max}, \\ y_j &= (\eta_c)_j = (\eta_t)_j = (\eta_r)_j = y_0 + j \Delta y \text{ mit } j = 0 \dots j_{\max}, \\ (\zeta_c)_{k_c} &= k_c / k_{c_{\max}} \quad \text{mit } k_c = 0 \dots k_{c_{\max}}, \\ (\zeta_t)_{k_t} &= k_t / k_{t_{\max}} \quad \text{mit } k_t = 0 \dots k_{t_{\max}}, \\ (\zeta_r)_{k_r} &= k_r / k_{r_{\max}} \quad \text{mit } k_r = 0 \dots k_{r_{\max}}, \\ t^n &= (\tau_c)^n = (\tau_t)^n = (\tau_r)^n = t_0 + n \Delta t \text{ mit } n = 0 \dots n_{\max}, \end{aligned} \quad (3.158)$$

mit  $\Delta t$  der Zeitschrittweite,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  den Schrittweiten in der Horizontalen und der Vertikalauflösung  $\Delta \zeta_{c,t,r} = 1/k_{c,t/r_{\max}}$  für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. für die Lithosphäre.





**Abbildung 3.3:** Horizontaler Schnitt durch das Rechengitter im Kalteisbereich. Die Geschwindigkeiten sind zwischen den Gitterpunkten definiert (Staggered Grid).

Um eine höhere numerische Stabilität zu gewährleisten wird ein “Staggered-Grid”, ein gestaffeltes Gitter, verwendet (siehe Abb. 3.3)[15, Kapitel 6.3]. Hierbei werden die drei Komponenten der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im kalten bzw. temperierten Bereich, die zwei Komponenten des Massenflusses  $\mathbf{q}$  und die zwei Komponenten der jeweiligen Gradienten von  $z_s$ ,  $z_m$ ,  $z_b$ ,  $z_{b_r}$ ,  $H_c$ ,  $H_t$  und  $H_r$  nicht auf, sondern zwischen benachbarten Gitterpunkten der betreffenden Koordinatenrichtung berechnet:

$$\begin{aligned}
 & (v_{c,x})_{i\pm\frac{1}{2},j,k_c}^n, \quad (v_{c,y})_{i,j\pm\frac{1}{2},k_c}^n, \quad (v_{c,z})_{i,j,k_c\pm\frac{1}{2}}^n, \\
 & (v_{t,x})_{i\pm\frac{1}{2},j,k_t}^n, \quad (v_{t,y})_{i,j\pm\frac{1}{2},k_t}^n, \quad (v_{t,z})_{i,j,k_t\pm\frac{1}{2}}^n, \\
 & (v_{r,x})_{i\pm\frac{1}{2},j,k_r}^n, \quad (v_{r,y})_{i,j\pm\frac{1}{2},k_r}^n, \quad (v_{r,z})_{i,j,k_r\pm\frac{1}{2}}^n, \\
 & (q_x)_{i\pm\frac{1}{2},j}^n, \quad (q_y)_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n, \\
 & \left( \frac{\partial z_s, z_m, z_b, z_{b_r}, H_c, H_t, H_r}{\partial x} \right)_{i\pm\frac{1}{2},j}^n, \quad \left( \frac{\partial z_s, z_m, z_b, z_{b_r}, H_c, H_t, H_r}{\partial y} \right)_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n.
 \end{aligned}$$

Alle übrigen Größen sind auf den Gitterpunkten selbst definiert.



## 4 Verwendete Datensätze

Das dynamische bzw. das thermodynamische Verhalten eines Eisschildes wird durch mehrere äußere Einflüsse, wie die Massenzufuhr (Schneefallrate), die Topographie des Felsgrundes, die Umgebungstemperatur an der Eisoberfläche, aber auch die Schwerkraft und die Wärmezufuhr aus dem Erdinneren bestimmt. Somit werden diese Größen auch als Input für die numerische Simulation eines Eisschildes benötigt. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 4.1 plakativ dargestellt. Die beiden Rechtecke stehen für die Regionen Eisschild und Lithosphäre bzw. Felsbett, die darin aufgelisteten Variablen stellen die Feldgrößen dar, welche bestimmt werden müssen. Die Ellipsen andererseits geben die äußeren Einflüsse, die auf die beiden Teilsysteme wirken, wieder. Dies geschieht entweder durch Vorschreiben von Randfunktionalen oder durch Vorgabe von physikalischen Parametern oder Gesetzen, die die Wechselwirkung beschreiben.

Mit Ausnahme der Schwerkraft und des geothermen Wärmeflusses können sich die oben gelisteten Größen über die betrachtete Zeitspanne merklich ändern. Es ist somit notwendig, die Werteverteilung der verschiedenen Größen im Raum zu kennen, und zusätzlich eine Anpassung an die sich mit der Zeit ändernden Verhältnisse zu konstruieren.

Datensätze über die *heutige* Verteilung lassen sich meist aus Meßwerten bestimmen und wurden für diese Arbeit aus verschiedenen Quellen bezogen. Im folgenden werden diese Datensätze, die zur numerischen Simulation der Antarktis verwendet wurden, eingeführt und erläutert.

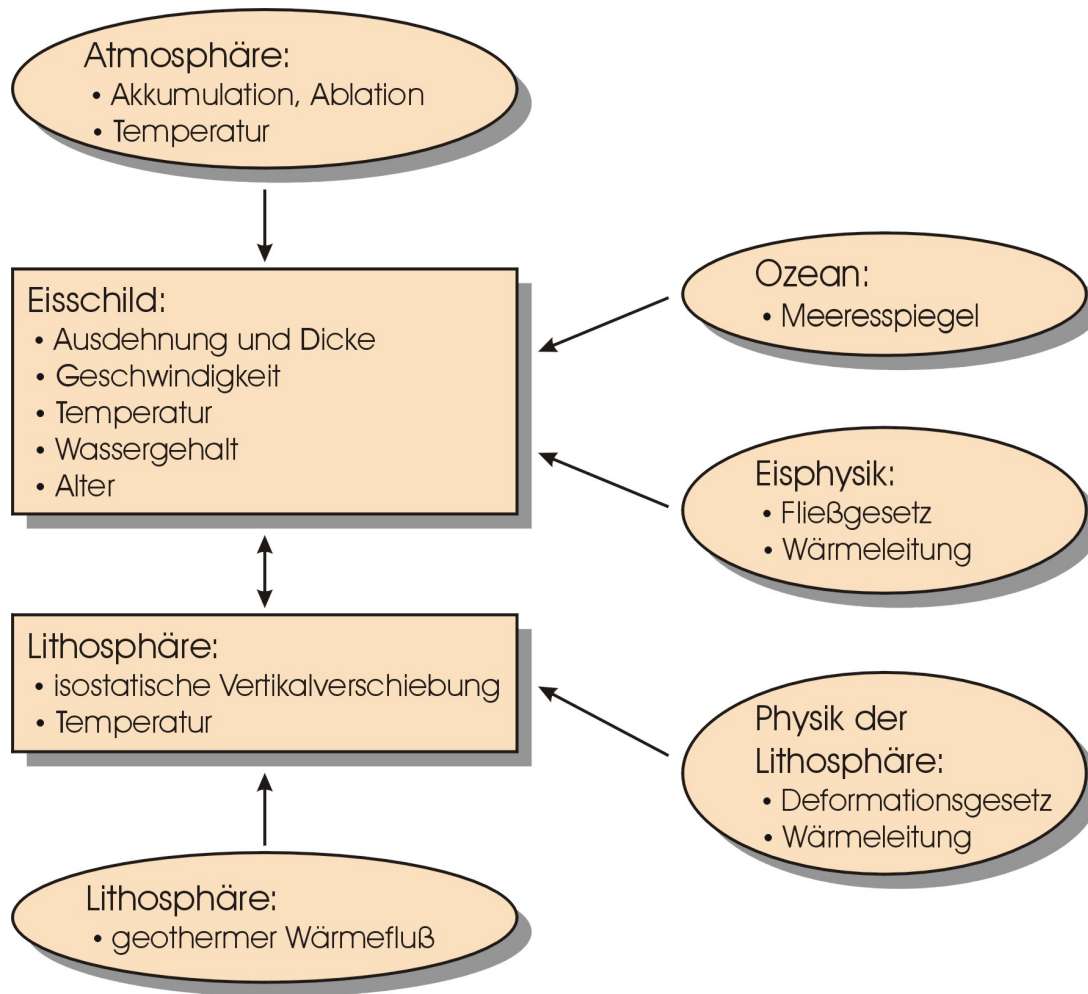
Es sei vorab angemerkt, dass Höhenangaben sich auf das OSU91a<sup>1</sup> Geoid<sup>2</sup> beziehen, und dass alle verwendeten Datensätze, die eine Werteverteilung über den Raum der Antarktis darstellen, mittels polar-stereographischer Projektion bezüglich des WGS84<sup>3</sup> Ellipsoids

---

<sup>1</sup>OSU91a: Globales Geoidmodell der Ohio State University (OSU) von 1991.

<sup>2</sup>Geoid: Niveaufläche (Äquipotentialfläche) des Erdschwerefeldes, die in mittlerer Höhe des Meeresspiegels verläuft. Physikalisches Modell der Erdfigur, das von Gauß (1828) und Listing (Namensgebung 1872) entwickelt wurde - im Gegensatz zum geometrischen Modell des Erdellipsoids. Steht überall senkrecht auf der Lotrichtung.

<sup>3</sup>WGS84: Erdellipsoid - ein globales Rotationsellipsoid, das sich dem Geoid möglichst gut anschmiegt. Das Referenzellipsoid wird durch die beiden Achsen  $a = 6\,378\,137.000$  m und  $b = 6\,356\,752.315$  m bestimmt, sowie der Abplattung  $f = (a - b)/a = 1 : 298.25722$ . (World Geodetic System 1984)



**Abbildung 4.1:** Funktionsschema des Eisschildmodells SICOPOLIS (Greve, pers. comm. 2003). Ovale markieren Inputgrößen, Kästchen errechnete Größen.

auf einer Bildebene parallel zu  $71^\circ$ Süd vorliegen.

## 4.1 Eisoberflächentopographie

Für die Oberflächentopographie wurde der RAMPDEM (Radarsat Antarctic Mapping Project Digital Elevation Model) Datensatz [31] verwendet; die Daten wurden von dem EOS Distributed Active Archive Center (DAAC) am National Snow and Ice Data Center (NSIDC), University of Colorado, Boulder, CO, zur Verfügung gestellt. Dieser Datensatz ist eine Zusammenstellung von Meßwerten aus verschiedenen Quellen. Er beruht hauptsächlich auf den Radar Altimeter Messungen des Satelliten ERS-1 zwischen 1994 und 1995 und luftgestützten Radarechopeilungen, die mit den herkömmlichen geodätischen Messungen diverser Überlandmissionen, die zwischen 1940 und 1990 durchgeführt wurden, ergänzt und abgeglichen wurden [32].

Der verwendete Datensatz liegt in  $x, y$ -Koordinaten auf der stereographischen Bildebene mit einer horizontalen Auflösung von 1 km vor, aus diesem wurden die benötigten Werte auf dem verwendeten, groberen Simulationsgitter extrahiert. Die Genauigkeit des Original-Datensatzes liegt bei mindestens  $\pm 100$  m, meist sogar besser als  $\pm 10$  m [31]. Abbildung 4.2 zeigt die heutige Eisoberflächentopographie des gesamten Rechengebietes in Kilometern über dem Meeresspiegelniveau.

Die Oberflächentopographie wird in dieser Arbeit als Referenz zur Beurteilung der Qualität der numerischen Simulation herangezogen, wird aber auch zur Bestimmung von Inputgrößen in ihrer heutigen Form benötigt.

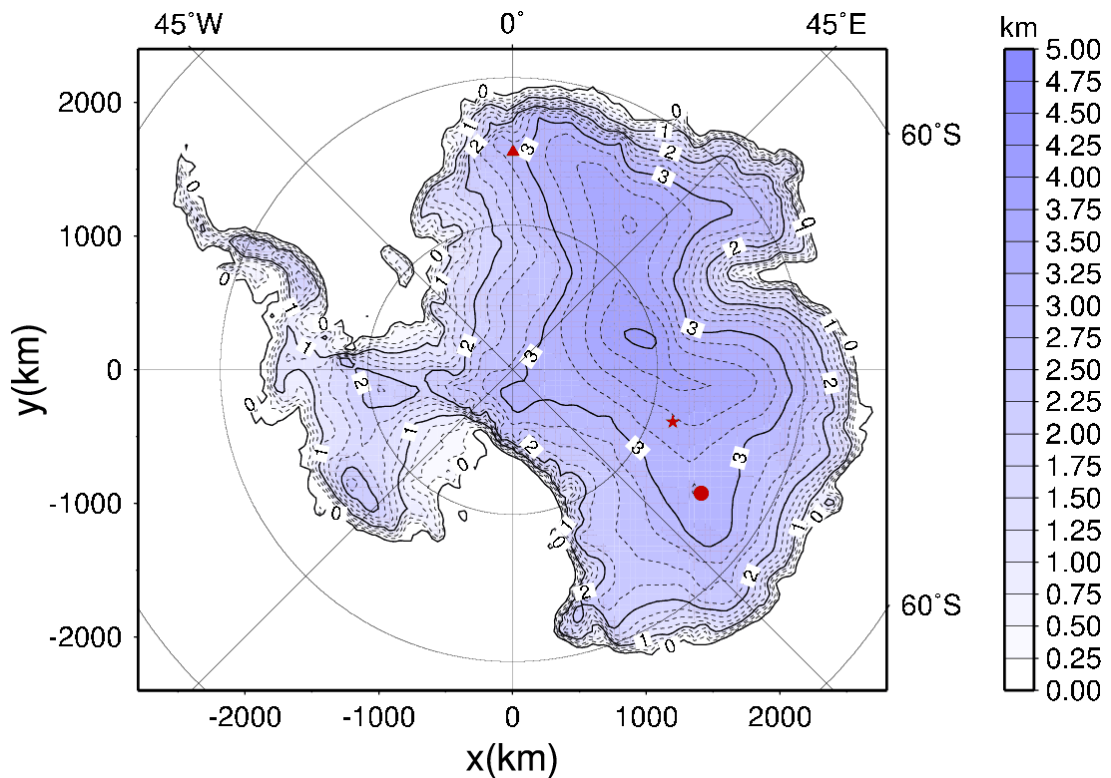


Abbildung 4.2: Höhe der Eisoberfläche bezüglich Normal Null in km.

## 4.2 Eisdicke, Meerestiefe und Wassersäule

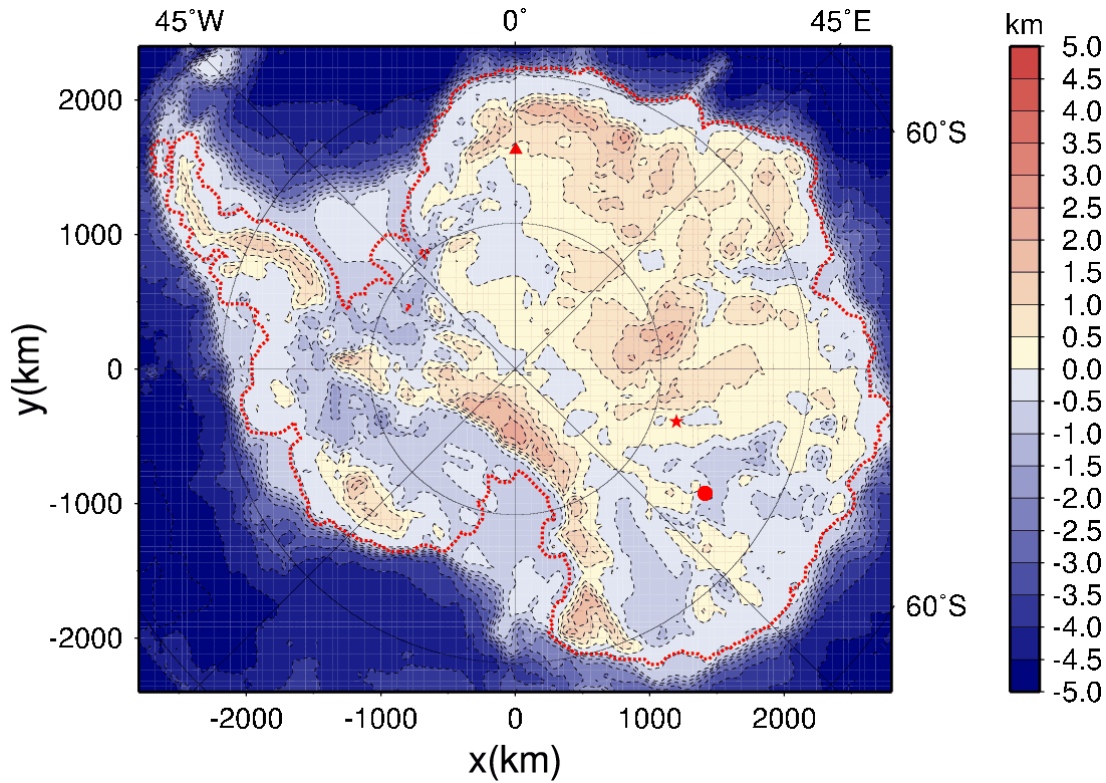
Zur Bestimmung der Bodentopographie wurden die Datensätze des BEDMAP-Projekts für die Dicke des Eisschildes samt Schelfeisen sowie für die Wassertiefe des umgebenden südpolaren Ozeans verwendet [33]. Diese Daten wurden durch klassische Meßmethoden, wie Radarecholotung und seismische Messungen bei Überflügen und Überlandmissionen, bestimmt und in dem 1996 ins Leben gerufenen BEDMAP-Projekt, dessen Ziel die Schaffung einer aktuellen und detaillierten Datenbasis bzw. Karte des antarktischen Kontinents

ist, gesammelt und abgeglichen. Die Daten liegen auf einem regelmäßigen Gitter in der stereographischen Bildebene mit einer Gitterweite von 5 km vor. Der Fehler der Daten wird in [14] mit maximal 300 m angegeben.

### 4.3 Bodentopographie

Mit Hilfe der Eisoberflächentopographie, der Eisdicke und der Meerestiefe ist es nun ein Leichtes, die Topographie des unter dem Eis und dem Ozean verborgenen Felsgrundes, der Lithosphärenoberseite, zu bestimmen:

Höhe der Eisoberfläche ( $z_s$ ) – Eisdicke ( $H$ ) = Höhe des Felsgrundes ( $z_b$ ).



**Abbildung 4.3:** Topographie des Felsbodens unter dem Eisschild in km.

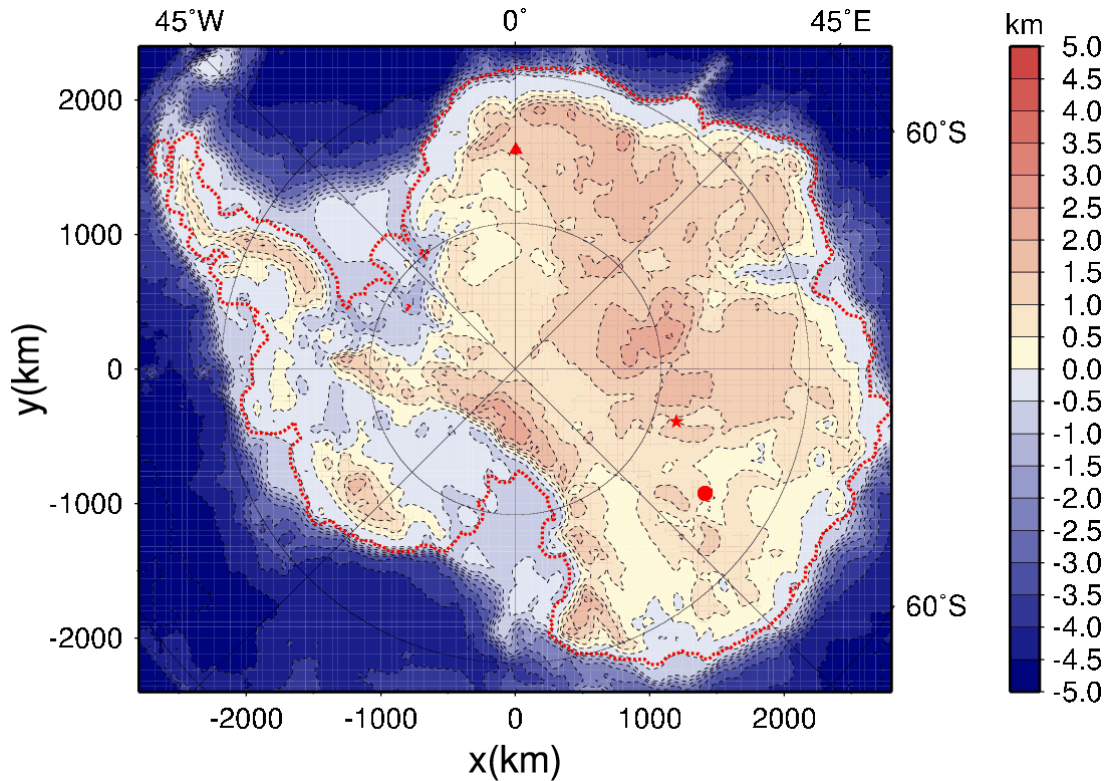
Die für die Modellrechnungen benötigte Topographie der entspannten Lithosphäre, d.h. ohne die darauf lastenden Eis- und Wassermassen, gewinnt man nun unmittelbar durch die Gleichung

$$z_{b_0}(i, j) = z_b(i, j) + \frac{\rho_i}{\rho_a} H(i, j), \quad (4.1)$$

wobei  $z_{b_0}(i, j)$  die Höhe des entspannten Bodens an der Stelle  $(i, j)$  auf dem (numerischen) Gitter,  $z_b$  die heutige Bodentopographie und  $H$  die Eisdicke darstellen [15, Kapitel 4.2].  $\rho_i$  und  $\rho_a$  bezeichnen die Dichte des Eises bzw. der Asthenosphäre. Für das Verhältnis  $\rho_i/\rho_a$

wurde der Wert 0.28 angenommen. Diese Gleichung wird als lokal bezeichnet, da jeder Punkt  $(i, j)$  als unabhängig von seinen Nachbarpunkten betrachtet wird. Diese Annahme kann getroffen werden, solange ein großes zusammenhängendes, vereistes Gebiet, wie zum Beispiel das antarktische Eisschild, betrachtet wird.

Ein die Wirklichkeit besser abbildender Ansatz zur Berechnung der entspannten Bodentopographie wurde in [28] untersucht, ist aber im Rahmen dieser Arbeit nicht verwendet worden.



**Abbildung 4.4:** Topographie des entspannten Felsgrundes (ohne Eislast) in km.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 wird die Bodentopographie mit und ohne Eislast dargestellt; die Höhenlinien in Kilometern beziehen sich auf das heutige Meeresspiegelniveau. Es ist gut zu erkennen, dass die Westantarktis bei der heutigen Topographie eher einer dem eigentlichen Kontinent vorgelagerten, mit Eis überzogenen Inselgruppe entspricht, da das Niveau dieser Region weitgehend unter Normal Null liegt. Eine Tatsache, die auch bei entspannter Lithosphäre bestehen bleibt.

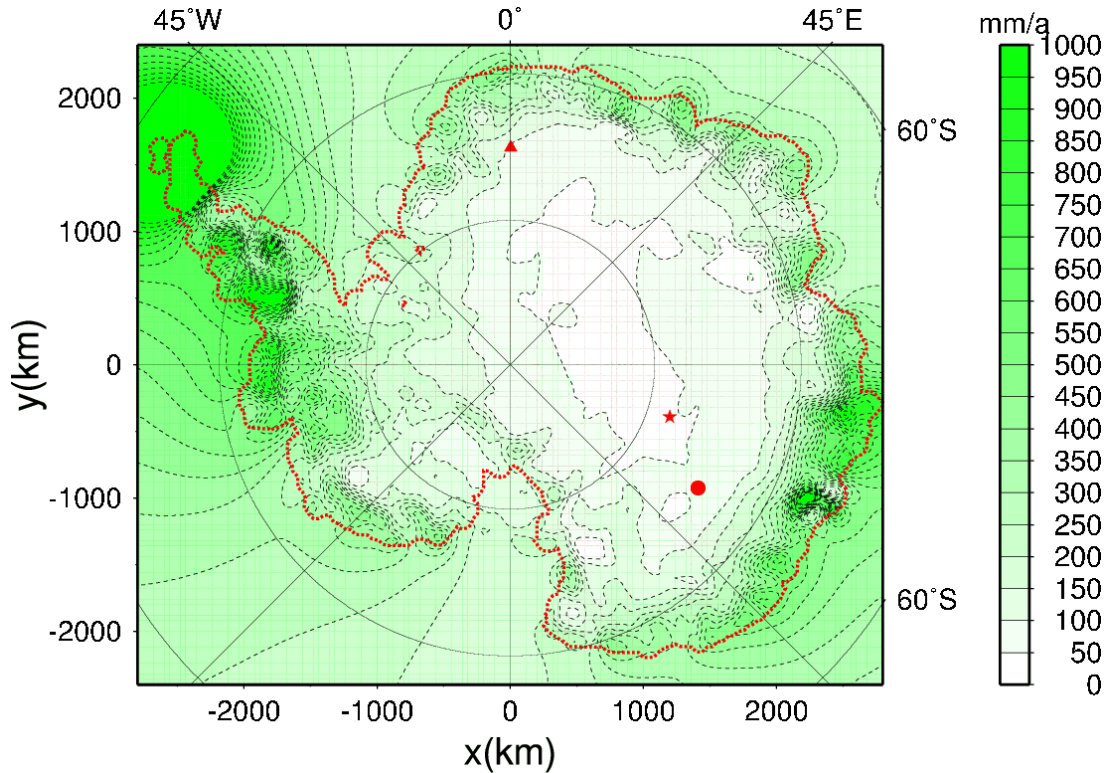
## 4.4 Schneefallrate

Die Schneefallverteilung stellt gleich in mehrerer Hinsicht eine mit Unsicherheiten behaftete Inputgröße dar. Zum einen sind Meßwerte nur an vereinzelten Punkten des Eisschildes



bekannt, so dass man kaum von einer flächendeckenden Datenerhebung sprechen kann, zum anderen ist es nicht bekannt, ob und wie sich die Niederschlagsverteilung in der Vergangenheit im Laufe der Zeit änderte.

Für diese überaus wichtige Inputgröße wurde der aus mehr als 1800 Einzelmessungen zusammengestellte Datensatz von Vaughan et al. [41] verwendet. Dieser zum Zeitpunkt der Datenerfassung für diese Arbeit beste verfügbare Datensatz für die Akkumulationsverteilung liegt auf einem regelmäßigen Gitter mit einer räumlichen Auflösung von 10 km vor.



**Abbildung 4.5:** Schneefall in mm pro Jahr Eisequivalent.

Um die Schneefallrate an die Gegebenheiten einer anderen Zeit anzupassen wird die heutige Akkumulationsverteilung mit einem von dem Temperaturunterschied relativ zu heute abhängigen Faktor modifiziert:

$$S(i, j; t) = S^{\text{today}}(i, j) \cdot (1 + \gamma_s \Delta T_{\text{ma}}(t)), \quad (4.2)$$

mit  $S(i, j; t)$  der Akkumulationverteilung in Raum und Zeit,  $S^{\text{today}}(i, j)$  der heutigen Schneefallrate,  $\Delta T_{\text{ma}}(t)$  dem Temperaturunterschied der mittleren Erdtemperatur relativ zu heute und dem Parameter  $\gamma_s = 0.075$  [17]. Man folgt damit der Annahme, dass die Niederschläge zur Temperatur proportional sind. Zur Festlegung von  $\gamma_s$  sind Niederschlagsrechnungen mit allgemeinen Zirkulationsmodellen für den Zeitpunkt des Klima-



minimums (eng. glacial maximum, kurz GCM) vor 21.000 Jahren durchgeführt worden. Rechnungen mit unterschiedlichen GCMs führen allerdings zu  $\gamma_s$ -Werten, die sich stark unterscheiden.

Die Abbildung 4.5 zeigt die heutige Schneefallrate in Millimetern Eisäquivalent pro Jahr über dem Rechengebiet. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Niederschläge im Inneren des ostantarktischen Eisschildes minimal sind und zum Rande des eisbedeckten Kontinents zunehmen.

## 4.5 Schmelzrate

Die Oberflächenschmelzrate, auch als Ablationsrate bezeichnet, wird durch ein “Positive-Degree-Day-Model” [3, 37] parametrisiert. Hierbei wird die Schmelzrate durch den Temperaturexzeß, d.h. den Tagen im Jahr, an denen die Temperatur  $0^\circ\text{C}$  übersteigt, bestimmt. Die Einflüsse durch die tageszeitlichen Schwankungen und sich ändernder Wetterverhältnisse gehen als eine statistische Normalverteilung mit der Standardabweichung  $\sigma_{\text{stat}} = 5^\circ\text{C}$  in die Parametrisierung ein. Eine genaue Beschreibung der verwendeten Parametrisierung findet sich in [15, Kapitel 8.3].

Es sei hier angemerkt, dass die Ablation, aufgrund der im Jahresmittel weit unter dem Schmelzpunkt liegenden Oberflächentemperatur, nur einen verschwindend geringen Einfluß auf das zentral-antarktische Eisschild besitzt.

## 4.6 Oberflächentemperatur

Zur Bestimmung der Oberflächentemperaturverteilung im Jahresmittel wird die Diskretisierung nach Huybrechts [24] verwendet:

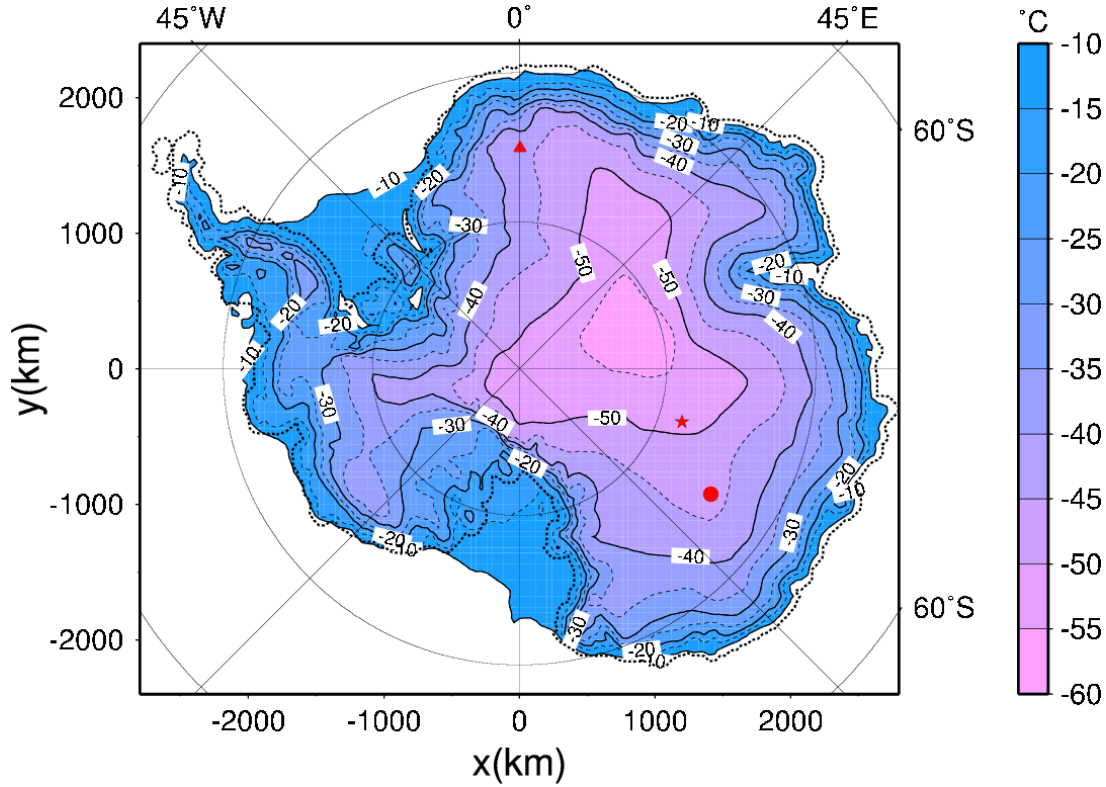
$$\tilde{T}_{s,ma}(x, y, t) = \theta_{0;ma} + \gamma_{0;ma} \cdot z_s(x, y, t) + c_{0;ma} \cdot |\varphi|. \quad (4.3)$$

Diese Diskretisierung gibt die Atmosphären-Kontakt-Temperatur<sup>4</sup> als Funktion der geo-

---

<sup>4</sup>Es handelt sich hier nicht um die Lufttemperatur, sondern um eine “Referenztemperatur” an der Oberfläche, welche als Mittelwert über einige Jahre angesehen werden kann. In der Glaziologie wird diese Temperatur oft mit der Temperatur in 10 m Tiefe identifiziert. Damit werden die jahreszeitlichen Schwankungen über ca. 10 Jahre eliminiert. Die Formel (4.3) ist jedoch eine reine Parametrisierung, welche an heutigen Temperaturdaten abgeglichen wurde.

graphischen Breite  $\varphi$  und der Höhe  $z_s$  über Normal Null an. Die Parameter haben die Werte  $\theta_{0;ma} = 34.46^\circ\text{C}$ ,  $\gamma_{0;ma} = -9.14 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C/m}$  und  $c_{0;ma} = -0.68775^\circ\text{C}/^\circ\text{Süd}$ . Für die Höhe  $z_s$  kann man Werte der Oberflächentopographie zu jedem beliebigen Zeitpunkt verwenden, so dass man eine gewissermaßen zeitabhängige Temperaturverteilung erhält.



**Abbildung 4.6:** Temperatur an der Oberfläche in Grad Celsius für das heutige antarktische Eisschild.

Zur Konstruktion einer zeitabhängigen Oberflächentemperatur  $T_{s,ma}(x, y, t)$  wird die oben beschriebene Temperaturverteilung  $\tilde{T}_{s,ma}(x, y, t)$  einfach mit dem jeweiligen Temperaturunterschied zu heute  $\Delta T_{ma}(t)$ , den man aus der zeitlichen Entwicklung der lokalen Lufttemperatur gewinnt, ergänzt:

$$T_{s,ma}(x, y, t) = \tilde{T}_{s,ma}(x, y, t) + \Delta T_{ma}(t). \quad (4.4)$$

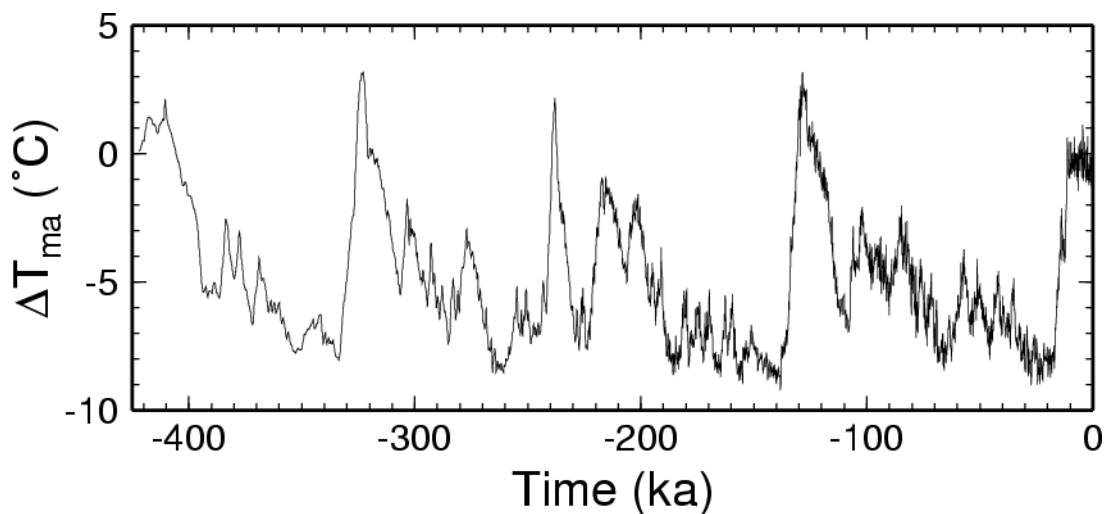
Auch dies ist nur eine Parametrisierung, die mit vergleichsweise großen Unsicherheiten behaftet ist, aber sie bietet den enormen Vorteil, die Temperatur unter anderem als Funktion der jeweils aktuellen Höhe der Eisoberfläche über Normal-Null darzustellen. Man erhält somit eine von der Topographie abhängige Oberflächentemperatur-Verteilung.

## 4.7 Geothermer Wärmefluß

Eine weitere wichtige Größe ist der geotherme Wärmefluß, das heißt der Transport von Wärme aus dem Erdinneren durch die Erdkruste. Zur Zeit wird diese Wertverteilung durch einen konstanten Wert über das gesamte Rechengebiet approximiert. Für diese Konstante wird üblicherweise ein Wert von ca.  $55 \text{ mW/m}^2$  angenommen [25]. In dieser Dissertation werden aber zusätzlich noch die Werte  $50 \text{ mW/m}^2$  und  $45 \text{ mW/m}^2$  betrachtet, da neuere Auswertungen der Messdaten [40] diesen Wert als zu hoch erscheinen lassen.

## 4.8 Klimageschichte

Die schon erwähnte zeitliche Entwicklung der lokalen Lufttemperatur, die als Klimaantrieb eine wichtige Rolle bei der Konstruktion der Inputgröße für das numerische Eisschildmodell spielt, wurde aus dem bei der russischen Antarktisstation Vostok gezogenen Bohrkern gewonnen [36], und reicht, wie Abbildung 4.7 zeigt, über vier volle Klimazyklen 420.000 Jahre in die Vergangenheit.



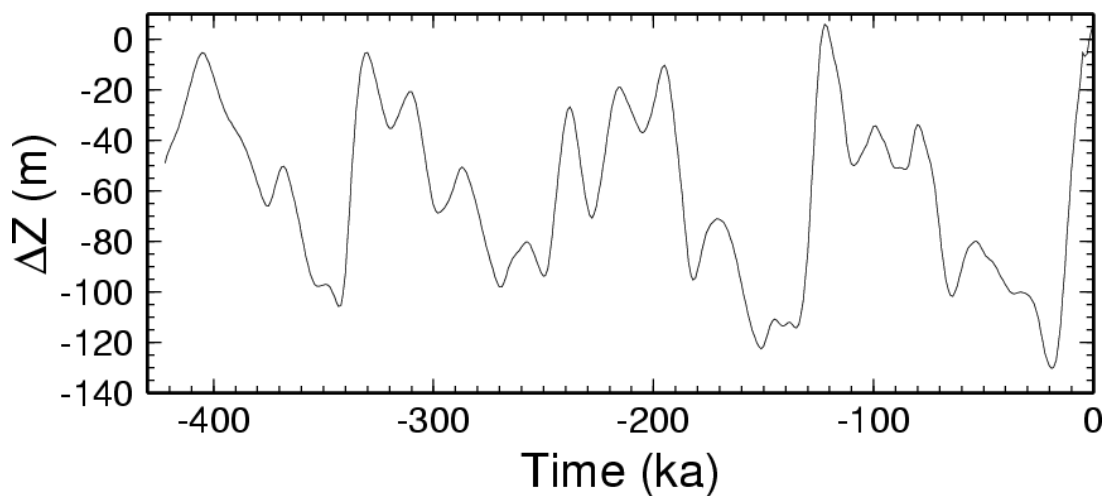
**Abbildung 4.7:** Variation der Temperatur relativ zu heute in Grad Celsius.

Es sollte hier darauf hingewiesen werden, dass die in Abbildung 4.7 dargestellte  $\Delta T_{ma}$ -Zeitskala auf einer Altersbestimmung des Eises basiert (siehe hierzu [36, Box 1]), die somit als Input in das Modell mit einfließt, um gerade diese Aufgabe, nämlich die Bestimmung des Eisalters, durchzuführen. In diesem Sinne ist die Lösung der Hauptaufgabe dieser Dissertation ein einem Zirkelschluß unterworfenes Problem. Man kann sich von dieser Schwäche nur dadurch lösen, dass man die Altersbestimmung als ein iteratives Problem betrachtet. Doch zunächst ist das Problem der Altersbestimmung, wie es in Kapitel [2] formuliert wurde, ein an sich technisch anspruchsvolles Problem, das erst gelöst werden

muss, bevor die Frage der oben erwähnten iterativen Altersbestimmung angegangen werden kann.

## 4.9 Meeresspiegelvariation

Um die Höhe von Normal-Null an die Gegebenheiten der Vergangenheit anzupassen, werden die Daten aus der SPECMAP-Rekonstruktion [26] der zeitlichen Entwicklung des Meeresspiegelniveaus verwendet. Damit liegt ein Datensatz vor, der den Zeitrahmen, der durch das oben beschriebene Vostok-Temperaturprofil gesteckt wird, voll abdeckt.



**Abbildung 4.8:** Evolution der Meeresspiegel-Höhe in Metern relativ zu heute.

Die Entwicklung des Meeresspiegel relativ zu heute ist in [Abbildung 4.8](#) dargestellt. Auch hier sind die mit den vier Klimazyklen einhergehenden Schwankungen gut zu erkennen.

Auch die SPECMAP-Rekonstruktion stellt wie die Klimageschichte eine Inputgröße dar, welche eigentlich von einem Klimamodell, hier der ganzen Erde, als Output geliefert wurde. Somit sollte man in Betracht ziehen, die Meeresspiegelvariation, ebenso wie die Klimageschichte, iterativ zu behandeln. Hierbei ist aber zu bedenken, dass das Meeresspiegelniveau nicht nur von den Veränderungen in der Antarktis, sondern ebenso von denen auf der Nordhalbkugel bestimmt wird. Ein iteratives Vorgehen für die Meeresspiegelvariation wäre also nur für ein globales Modell zulässig.

# 5 Eisaltersberechnung mit SICOPOLIS

In diesem Kapitel wird nun die in Kapitel [2] dargestellte Methode 2 der Altersbestimmung näher betrachtet. Da die Methode 2 mit der ebenfalls in Kapitel [2] beschriebenen, numerisch sehr aufwendigen Methode 3 vergleichbar ist - sie führen beide auf die Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen, die mit denselben numerischen Verfahren gelöst werden können - wird hiermit auch der Grundstein für eine spätere Implementierung einer Altersberechnung nach der Methode 3 gelegt.

## 5.1 Die advektive Eisaltersgleichung

In einem kartesischen Koordinatensystem, mit  $x, y$  in der horizontalen Ebene,  $z$  als der vertikalen Koordinate und der Zeit  $t$  lautet die Evolutionsgleichung des Eisalters  $A(x, y, z, t)$ :

$$\frac{dA}{dt} = 1, \quad A(z = z_s) = 0, \quad (5.1)$$

mit der materiellen Zeitableitung  $d/dt$  und der freien Oberfläche des Eisschildes  $z = z_s(x, y, t)$ . Diese Gleichung besagt, dass das Eis im Laufe eines Jahres ein Jahr älter wird. Mit der Bedingung am oberen Rand, der freien Oberfläche, dass das Eisalter hier Null beträgt, da die Oberfläche des Eisschildes den Ort markiert an dem der Schnee, der später das Eis bildet, niedergeht.

In Eulerscher Darstellung ergibt sich aus Gleichung (5.1)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} = 1, \quad A(z = z_s) = 0, \quad (5.2)$$

bzw.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\text{grad } A) \cdot \mathbf{v} = 1, \quad A(z = z_s) = 0, \quad (5.3)$$

mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  mit der sich die Eispartikel durch das Eisschild be-

wegen.

Eine Darstellung der Gleichung (5.2) in konservativer Form liefert

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Av_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Av_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Av_z)}{\partial z} = 1 + A\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \quad A(z = z_s) = 0, \quad (5.4)$$

bzw.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}A) = 1 + A \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad A(z = z_s) = 0. \quad (5.5)$$

Daraus ergibt sich, unter Annahme der Inkompressibilität ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ), die konservative, hyperbolische Differentialgleichung mit konstantem Quellterm und homogener Dirichlet-Randbedingung:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Av_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Av_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Av_z)}{\partial z} = 1, \quad A(z = z_s) = 0, \quad (5.6)$$

bzw.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A\mathbf{v}) = 1, \quad A(z = z_s) = 0. \quad (5.7)$$

Im folgenden wird diese Gleichung betrachtet.

## 5.2 Das numerische Lösungsverfahren

Im späteren Verlauf dieses Kapitels wird auch Gleichung (5.6) den aus Kapitel [3] bekannten Transformation unterzogen, doch zunächst wird ein allgemeines, iteratives Verfahren zur Lösung des in der Gleichung beschriebenen Problems hergeleitet.

### 5.2.1 Allgemeines

Hierfür werden die Abkürzungen  $f = Av_x$ ,  $g = Av_y$  und  $h = Av_z$  eingeführt, die die Komponenten des Flußterms  $\mathbf{F} = \mathbf{v}A$  in  $x, y$  und  $z$  Richtung darstellen, so dass sich Gleichung (5.6) schreiben lässt als

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 1, \quad A(z = z_s) = 0. \quad (5.8)$$

Wird nun eine Diskretisierung in Raum und Zeit gemäß

$$\begin{aligned}
 x_i &= i \Delta x & \text{mit } i &= 0 \dots i_{\max}, \\
 y_j &= j \Delta y & \text{mit } j &= 0 \dots j_{\max}, \\
 z_k &= k \Delta z & \text{mit } k &= 0 \dots k_{\max}, \\
 t^n &= n \Delta t & \text{mit } n &= 0 \dots n_{\max},
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

verwendet (siehe hierzu auch Kapitel [3.4]), und über den Raum-Zeit-Abschnitt

$$[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}] \times [z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}] \tag{5.10}$$

integriert, so ergibt sich aus Gleichung (5.8)

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} A(x, y, z, t^{n+1}) dx dy dz - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} A(x, y, z, t^n) dx dy dz \\
 & + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x_{i+\frac{1}{2}}, y, z, t) dy dz dt - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x_{i-\frac{1}{2}}, y, z, t) dy dz dt \\
 & + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} g(x, y_{j+\frac{1}{2}}, z, t) dx dz dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} g(x, y_{j-\frac{1}{2}}, z, t) dx dz dt \\
 & + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} h(x, y, z_{k+\frac{1}{2}}, t) dx dy dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} h(x, y, z_{k-\frac{1}{2}}, t) dx dy dt \\
 & = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} 1 dx dy dz dt = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Hier werden die Integralterme nun durch gemittelte Ausdrücke ersetzt. Für das Eisalter wird

$$\mathcal{A}_{ijk}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} A(x, y, z, t^n) dx dy dz \tag{5.12}$$

definiert. Entsprechend ergeben sich für die  $x, y, z$ -Komponenten der Flüsse

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y \Delta z \Delta t} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(x_{i+\frac{1}{2}}, y, z, t) dy dz dt, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta z \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} g(x, y_{j+\frac{1}{2}}, z, t) dx dz dt, \quad (5.14)$$

$$\mathcal{H}_{ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} h(x, y, z_{k+\frac{1}{2}}, t) dx dy dt. \quad (5.15)$$

Damit folgt aus Gleichung (5.11) die Differenzengleichung

$$\frac{\mathcal{A}_{ijk}^{n+1} - \mathcal{A}_{ijk}^n}{\Delta t} + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{\mathcal{H}_{ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{H}_{ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} = 1. \quad (5.16)$$

Da im Folgenden ein zeitlich explizites Verfahren betrachtet werden soll, approximiert man die verschiedenen Flußterm zum Zeitpunkt  $n + \frac{1}{2}$  durch die entsprechenden Werte zum jetzigen Zeitpunkt  $n$ . Aufgelöst nach dem zu bestimmenden Eisalter im nächsten Zeitschritt,  $n + 1$ , ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ijk}^{n+1} &= \mathcal{A}_{ijk}^n + \Delta t \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta z} (\mathcal{H}_{ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{H}_{ijk-\frac{1}{2}}^n). \end{aligned} \quad (5.17)$$

### Randwertbetrachtungen

An dieser Stelle ist es sinnvoll, die Gebietsgrenzen näher zu betrachten, da der Algorithmus hier möglicherweise auf Werte an Gitterpunkten außerhalb des Gebietes, also in nicht definierten Punkten, zugreift.

- Die Ränder in der Horizontalen ( $i = 0, i_{\max}$  bzw.  $j = 0, j_{\max}$ ) werden in unserem Modell als eisfrei definiert, so dass alle hier benötigten Werte Null gesetzt sind. Es ist also ausreichend, nur das Teilintervall  $i = 1, \dots, i_{\max} - 1$  bzw.  $j = 1, \dots, j_{\max} - 1$  zu betrachten.
- Anders die Ränder in der Vertikalen! Hier ist eine gesonderte Behandlung des oberen Randes und des unteren Randes notwendig.

Für den oberen Rand ( $k = k_{\max}$ ), die freie Oberfläche, ergibt sich aus der Dirichlet-



Randbedingung  $A(z = z_s) = 0$ :

$$\mathcal{A}_{ijk_{\max}}^{n+1} = 0. \quad (5.18)$$

Für den Boden ( $k = 0$ ) verwendet man folgende Differenzengleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij0}^{n+1} = & \mathcal{A}_{ij0}^n + \Delta t \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}j0}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}j0}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}0}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}0}^n) - \frac{2\Delta t}{\Delta z} (\mathcal{H}_{ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{H}_{ij0}^n). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Um nun aus diesem System exakter Differenzengleichungen (5.17), (5.18), (5.19) ein numerisches Lösungsverfahren herzuleiten, werden die gemittelten Werte durch Näherungen der Form

$$\mathcal{A}_{ijk}^n = A_{ijk}^n \quad (5.20)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^n &= A_{i+\frac{1}{2}jk}^n (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \theta_{i+\frac{1}{2}jk}^n, \\ \mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^n &= A_{ij+\frac{1}{2}k}^n (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \phi_{ij+\frac{1}{2}k}^n, \\ \mathcal{H}_{ijk+\frac{1}{2}}^n &= A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - \psi_{ijk+\frac{1}{2}}^n, \\ \mathcal{H}_{ij0}^n &= A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n - \psi_{ij0}^n \end{aligned} \quad (5.21)$$

ersetzt, wobei  $\theta_{i\pm\frac{1}{2}jk}^n$ ,  $\phi_{ij\pm\frac{1}{2}k}^n$ ,  $\psi_{ijk\pm\frac{1}{2}}^n$  und  $\psi_{ij0}^n$  optionale “Dissipation Limiter” darstellen [30]. Das sich daraus ergebende Lösungsschema für explizite Verfahren lautet:

$$k = k_{\max} : \quad A_{ijk_{\max}}^{n+1} = 0, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} k = 1, \dots, k_{\max} - 1 : \quad A_{ijk}^{n+1} = & A_{ijk}^n + \Delta t \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i+\frac{1}{2}jk}^n (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n - A_{i-\frac{1}{2}jk}^n (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} (A_{ij+\frac{1}{2}k}^n (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n - A_{ij-\frac{1}{2}k}^n (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\xi_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \xi_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta z} (A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - A_{ijk-\frac{1}{2}}^n (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta z} (\zeta_{ijk+\frac{1}{2}}^n - \zeta_{ijk-\frac{1}{2}}^n), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
 k = 0 : \quad A_{ij0}^{n+1} &= A_{ij0}^n + \Delta t \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i+\frac{1}{2}jk}^n (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n - A_{i-\frac{1}{2}jk}^n (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} (A_{ij+\frac{1}{2}k}^n (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n - A_{ij-\frac{1}{2}k}^n (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\xi_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \xi_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\
 &\quad - \frac{2\Delta t}{\Delta z} (A_{ij\frac{1}{2}}^n (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n - A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n) \\
 &\quad + \frac{2\Delta t}{\Delta z} (\zeta_{ij\frac{1}{2}}^n - \zeta_{ij0}^n). \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

### 5.2.2 First Order Upstream (UP1)

Es erfüllen zwar auch andere Verfahren die in (5.22), (5.23) und (5.24) gestellten Bedingungen, aber die Untersuchungen von Greve et al. [19] haben gezeigt, dass das “First Order Upstream” Verfahren eine für unsere Bedürfnisse ausreichende Genauigkeit und Stabilität aufweist. Zusätzlich ist das “First Order Upstream” Verfahren, aufgrund seiner einfachen Struktur, mit relativ wenig Aufwand in den Programmcode von SICOPOLIS implementierbar.

Bei dem **UP1** werden Informationen, die für die Berechnung der Werte des nächsten Zeitschrittes  $n + 1$  notwendig sind, nur in Fließrichtung transportiert. Daher definiert man die gemittelten Altersterme in Abhängigkeit der Fließrichtung der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente gemäß

$$\begin{aligned}
 A_{i+\frac{1}{2}jk}^n &= \begin{cases} A_{ijk}^n & \text{für } (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n > 0 \\ A_{i+1jk}^n & \text{für } (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n < 0 \end{cases} & A_{i-\frac{1}{2}jk}^n &= \begin{cases} A_{i-1jk}^n & \text{für } (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n > 0 \\ A_{ijk}^n & \text{für } (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n < 0 \end{cases} \\
 A_{ij+\frac{1}{2}k}^n &= \begin{cases} A_{ijk}^n & \text{für } (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n > 0 \\ A_{ij+1k}^n & \text{für } (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n < 0 \end{cases} & A_{ij-\frac{1}{2}k}^n &= \begin{cases} A_{ij-1k}^n & \text{für } (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n > 0 \\ A_{ijk}^n & \text{für } (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n < 0 \end{cases} \\
 A_{ijk+\frac{1}{2}}^n &= \begin{cases} A_{ijk}^n & \text{für } (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ A_{ijk+1}^n & \text{für } (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases} & A_{ijk-\frac{1}{2}}^n &= \begin{cases} A_{ijk-1}^n & \text{für } (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n > 0 \\ A_{ijk}^n & \text{für } (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

und setzt die verschiedenen Dissipation-Limiter  $\theta_{i\pm\frac{1}{2}jk}^n$ ,  $\phi_{ij\pm\frac{1}{2}k}^n$ ,  $\psi_{ijk\pm\frac{1}{2}}^n$  und  $\psi_{ij0}^n$  zu Null. Damit ergibt sich aus den Gleichungen (5.22), (5.23) und (5.24) das letztendlich zu ver-

wendende Iterationsschema

$$k = k_{max} : \quad A_{ijk}^{n+1} = 0, \quad (5.26)$$

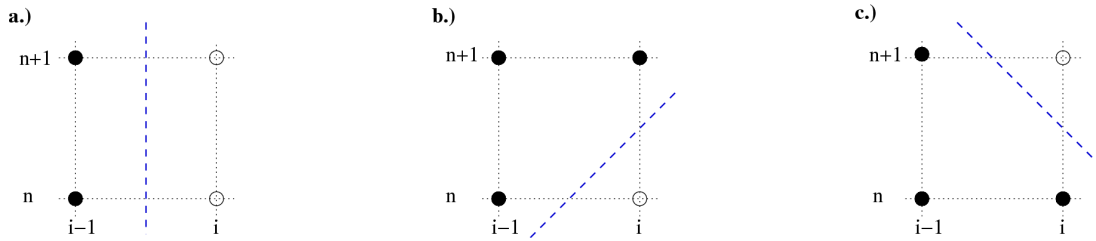
$$\begin{aligned} k = 1, \dots, k_{max} - 1 : \quad A_{ijk}^{n+1} = & A_{ijk}^n + \Delta t \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \begin{aligned} & A_{ijk}^n (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n) \\ & - A_{i+1jk}^n (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n) \\ & - A_{i-1jk}^n (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\ & + A_{ijk}^n (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[ \begin{aligned} & A_{ijk}^n (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n) \\ & - A_{ij+1k}^n (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n) \\ & - A_{ij-1k}^n (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\ & + A_{ijk}^n (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta z} \left[ \begin{aligned} & A_{ijk}^n (|(v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{ijk+1}^n (|(v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{ijk-1}^n (|(v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\ & + A_{ijk}^n (|(v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} k = 0 : \quad A_{ij0}^{n+1} = & A_{ij0}^n + \Delta t \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \begin{aligned} & A_{ij0}^n (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n) \\ & - A_{i+1j0}^n (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n) \\ & - A_{i-1j0}^n (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n) \\ & + A_{ij0}^n (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[ \begin{aligned} & A_{ij0}^n (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n) \\ & - A_{ij+10}^n (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n) \\ & - A_{ij-10}^n (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n) \\ & + A_{ij0}^n (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{2\Delta t}{\Delta z} \left[ \begin{aligned} & A_{ij0}^n \frac{1}{2} (|(v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{ij1}^n \frac{1}{2} (|(v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

### 5.3 Verhalten an den Grenzen des Eisschildes

Im Folgenden wird das Verhalten des vorgestellten Verfahrens an der Vereisungsgrenze, die in der  $x$ - und der  $y$ -Richtung nicht mit den Grenzen des Gebietes übereinstimmt, betrachtet. Hier kann es vorkommen, dass, um das Eisalter im nächsten Zeitschritt zu berechnen, Zustandsgrößen an einem eisfreien Punkt benötigt werden. Solche Größen, in unserem Falle das Eisalter und das Geschwindigkeitsfeld, sind im allgemeinen als Null definiert.

In Abbildung 5.1 sind die drei möglichen Zustände am Rande des Eisschildes schematisch (1-dimensional) dargestellt. Fall a.) zeigt ein stabiles Eisschild, d.h. Gitterpunkte die zum Zeitpunkt “n” eisfrei/vereist sind sind auch einen Zeitschritt später eisfrei/vereist. Fall b.) zeigt ein expandierendes, Fall c.) ein schrumpfendes Eisschild.



**Abbildung 5.1:** Punkte an der Vereisungsgrenze eines statischen (a.), wachsenden (b.) und schrumpfenden (c.) Eisschildes. ● markiert einen vereisten und ○ einen eisfreien Punkt.

Unter Vernachlässigung der  $y$  und der  $z$  Koordinaten ergibt sich aus (5.27) die ein-dimensionale Iterationsgleichung

$$\begin{aligned}
 A_i^{n+1} = & A_i^n + \Delta t \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \begin{aligned} & A_i^n (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{i+1}^n (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{i-1}^n (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ & + A_i^n (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned} \right].
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Wendet man diese Gleichung auf die oben genannte Problemstellung an und nimmt ferner an, dass die Geschwindigkeiten größer als Null sind, so ergibt sich für das Eisalter an der Stelle  $(i, n + 1)$

$$\text{a.) } A_i^{n+1} = \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ A_{i-1}^n (v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \tag{5.30}$$

$$\text{b.) } A_i^{n+1} = \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ A_{i-1}^n (v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n \right] \quad (5.31)$$

$$\text{c.) } A_i^{n+1} = A_i^n + \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ A_{i-1}^n (v_x)_{i-\frac{1}{2}}^n - A_i^n (v_x)_{i+\frac{1}{2}}^n \right] \quad (5.32)$$

Es zeigt sich, dass das Verfahren für den eisfreien Punkt  $(i, n+1)$  wie sie in den Fällen a.) und c.) auftreten, versagt, da es diesem ein Eisalter zuordnet.

Hingegen liefert es für vereiste Punkte innerhalb des Eisschildes, auch an der Vereisungsgrenze, sinnvolle Werte. Dies gilt ebenso für ein Geschwindigkeitsfeld kleiner oder gleich Null, wie sich leicht zeigen läßt.

Es ist also bei der numerischen Implementierung des Verfahrens notwendig, das Eisalter eisfreier Punkte in einem gesonderten Schritt Null zu setzen.

## 5.4 Lösung der transformierten Eisaltersgleichung

Nachdem nun der Algorithmus zur Berechnung des Eisalters in allgemeiner Form vorliegt, wird jetzt die für die Verwendung in SICOPOLIS angepaßte Form auf gleiche Weise hergeleitet. Hierfür wird die Eisaltersgleichung den in Kapitel [3.2] und [3.3.1] vorgestellten Transformationen unterworfen.

Zunächst spaltet man die drei-dimensionale Divergenz aus Gleichung (5.6) in einen zwei-dimensionalen, horizontalen und einen vertikalen Anteil auf

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \text{div}_{xy}(A \mathbf{v}_{xy}) + \frac{\partial A v_z}{\partial z} = 1. \quad (5.33)$$

Anschließend erhält man durch Transformation des horizontalen Anteils gemäß der Transformationsregel für eine horizontale Divergenz (3.49)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left( \frac{\partial (\sqrt{g_{22}} A v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\sqrt{g_{11}} A v_y)}{\partial y} \right) + \frac{\partial A v_z}{\partial z} = 1. \quad (5.34)$$

Auf diese teiltransformierte Gleichung wird nun die in Kapitel [3.3.1] vorgestellte  $\sigma$ -Transformation angewendet. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$f = \sqrt{g_{22}} A v_x, \quad g = \sqrt{g_{11}} A v_y, \quad h = A v_z \quad \text{und} \quad \gamma = \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad (5.35)$$

erhält man in Analogie zu Gleichung (5.8) die volltransformierte Eisaltersgleichung

für den Kalteisbereich

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial A}{\partial \tau_c} - \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial z_m}{\partial t} + \frac{e^{a \zeta_c} - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) \frac{\partial A}{\partial \zeta_c} \\
 & + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \xi_c} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial z_m}{\partial x} + \frac{e^{a \zeta_c} - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta_c} \\
 & + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta_c} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{e^{a \zeta_c} - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \frac{\partial g}{\partial \zeta_c} \\
 & + \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial h}{\partial \zeta_c} = 1,
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

und für den temperierten Bereich

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial A}{\partial \tau_t} - \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) \frac{\partial A}{\partial \zeta_t} \\
 & + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \xi_t} - \frac{1}{\gamma H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta_t} \\
 & + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta_t} - \frac{1}{\gamma H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial y} \right) \frac{\partial g}{\partial \zeta_t} \\
 & + \frac{1}{H_t} \frac{\partial h}{\partial \zeta_t} = 1.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Im weiteren werden nur noch die Größen mit Indices c oder t beschriftet, deren Form bzw. Bedeutung im Kalteisbereich sich von derjenigen im temperierten Bereich unterscheidet.

Die Gleichungen (5.36) und (5.37) werden nun über den Raum-Zeit-Abschnitt

$$[\xi_{i-\frac{1}{2}}, \xi_{i+\frac{1}{2}}] \times [\eta_{j-\frac{1}{2}}, \eta_{j+\frac{1}{2}}] \times [\zeta_{c/t; k-\frac{1}{2}}, \zeta_{c/t; k+\frac{1}{2}}] \times [\tau^n, \tau^{n+1}] \tag{5.38}$$

integriert. Hierbei wird für jeden Term das jeweils zur Ableitung passende Integral analytisch gelöst, vergleichbar mit dem Vorgehen in Gleichung (5.11). Allerdings erschwert die komplexere Struktur der einzelnen Integralterme deren Lösung, da es vorkommen kann, dass mehrere Größen von der jeweiligen Integrationsvariable abhängen. Zum besseren Verständnis des weiteren Vorgehens werden an dieser Stelle die Abhängigkeiten der einzelnen Größen aus den Gleichungen (5.36) und (5.37) explizit aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 A &= A(\xi, \eta, \zeta_{c/t}, \tau), \\
 f &= f(\xi, \eta, \zeta_{c/t}, \tau), \quad g = g(\xi, \eta, \zeta_{c/t}, \tau), \quad h = h(\xi, \eta, \zeta_{c/t}, \tau), \\
 H_c &= H_c(\xi, \eta, \tau), \quad H_t = H_t(\xi, \eta, \tau), \quad z_m = z_m(\xi, \eta, \tau), \quad z_b = z_b(\xi, \eta, \tau), \\
 \gamma &= \gamma(\xi, \eta).
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Im folgenden werden - der besseren Übersichtlichkeit halber separat von einander - die Vereinfachungen der verschiedenen Integralterme sowie die sich daraus ergebenden Ansätze für die Flußterme aufgeführt. Die analytische Lösung der Integrale wurde mit Hilfe der Regel für die partielle Integration<sup>1</sup> sowie des Mittelwertsatzes der Integralrechnung<sup>2</sup> durchgeführt [4]. Die hierbei auftretenden Mittelwerte werden durch die entsprechenden Werte an der Zellenmitte approximiert.

Die Zeitableitung:

*Integration nach  $\tau$ :*

$$\int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{\partial A}{\partial \tau} d\tau = A(\xi, \eta, \zeta, \tau^{n+1}) - A(\xi, \eta, \zeta, \tau^n), \quad (5.40)$$

*Ansatz für die Mittelung des Eisalters:*

$$A_{ijk}^n = \frac{1}{\Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\zeta_{k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{k+\frac{1}{2}}} A(\xi, \eta, \zeta, \tau^n) d\xi d\eta d\zeta. \quad (5.41)$$

Die  $x$ -Komponenten der Advektion:

*Integration nach  $\xi$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) d\xi &= \left[ \frac{1}{\gamma} f \right]_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} + \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{\gamma_{,\xi}}{\gamma^2} f \right) d\xi \\ &\approx \frac{f(\xi_{i+\frac{1}{2}}, \eta, \zeta, \tau)}{\gamma(\xi_{i+\frac{1}{2}}, \eta)} - \frac{f(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta, \zeta, \tau)}{\gamma(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta)} + \Delta \xi \frac{\gamma_{,\xi}(\xi_i, \eta)}{\gamma^2(\xi_i, \eta)} f(\xi_i, \eta, \zeta, \tau), \end{aligned} \quad (5.42)$$

mit  $\gamma_{,\xi}$  als abkürzende Schreibweise für die part. Ableitung von  $\gamma$  nach  $\xi$ .

*Ansatz für den Flußterm und den Zusatzterm:*

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta \eta \Delta \zeta \Delta \tau} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\zeta_{k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{f(\xi_{i+\frac{1}{2}}, \eta, \zeta, \tau)}{\gamma(\xi_{i+\frac{1}{2}}, \eta)} d\eta d\zeta d\tau, \quad (5.43)$$

<sup>1</sup>  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$

<sup>2</sup> Ist  $u(x)$  im Intervall  $[a, b]$  stetig, so gibt es ein  $\hat{x} \in (a, b)$  mit  $\int_a^b u(x) dx = (b-a) \cdot u(\hat{x})$ .

$$\widehat{\mathcal{F}}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\eta \Delta\zeta \Delta\tau} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\zeta_{k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{\gamma_{,\xi}(\xi_i, \eta)}{\gamma^2(\xi_i, \eta)} f(\xi_i, \eta, \zeta, \tau) d\eta d\zeta d\tau. \quad (5.44)$$

Die  $y$ -Komponenten der Advektion:

*Integration nach  $\eta$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) d\eta &= \left[ \frac{1}{\gamma} g \right]_{\eta_{i-\frac{1}{2}}}^{\eta_{i+\frac{1}{2}}} + \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{\gamma_{,\eta}}{\gamma^2} g \right) d\eta \quad \text{mit} \quad \gamma_{,\eta} = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \\ &\approx \frac{g(\xi, \eta_{j+\frac{1}{2}}, \zeta, \tau)}{\gamma(\xi, \eta_{j+\frac{1}{2}})} - \frac{g(\xi, \eta_{j-\frac{1}{2}}, \zeta, \tau)}{\gamma(\xi, \eta_{j-\frac{1}{2}})} + \Delta\eta \frac{\gamma_{,\eta}(\xi, \eta_j)}{\gamma^2(\xi, \eta_j)} g(\xi, \eta_j, \zeta, \tau), \end{aligned} \quad (5.45)$$

*Ansatz für den Flußterm und den Zusatzterm:*

$$\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\zeta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\zeta_{k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{g(\xi, \eta_{j+\frac{1}{2}}, \zeta, \tau)}{\gamma(\xi, \eta_{j+\frac{1}{2}})} d\xi d\zeta d\tau, \quad (5.46)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_{ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\zeta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\zeta_{k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{\gamma_{,\eta}(\xi, \eta_j)}{\gamma^2(\xi, \eta_j)} g(\xi, \eta_j, \zeta, \tau) d\xi d\zeta d\tau. \quad (5.47)$$

Die  $z$ -Komponente der Advektion im kaltem Eis:

*Integration nach  $\zeta_c$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial h}{\partial \zeta_c} \right) d\zeta_c &= \left[ \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} h \right]_{\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} + \int_{\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{e^a - 1}{H_c e^{a\zeta_c}} h \right) d\zeta_c \\ &\approx \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} h(\xi, \eta, \zeta_{c;k+\frac{1}{2}}, \tau) - \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}} h(\xi, \eta, \zeta_{c;k-\frac{1}{2}}, \tau) \\ &\quad + \Delta\zeta_c \frac{e^a - 1}{H_c e^{a\zeta_{c;k}}} h(\xi, \eta, \zeta_{c;k}, \tau), \end{aligned} \quad (5.48)$$



*Ansatz für den Flußterm und den Zusatzterm:*

$$\mathcal{H}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} h(\xi, \eta, \zeta_{c;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \quad (5.49)$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{e^a - 1}{H_c e^{a\zeta_{c;k}}} h(\xi, \eta, \zeta_{c;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau. \quad (5.50)$$

Die  $z$ -Komponente der Advektion im temperierten Eis:

*Integration nach  $\zeta_t$ :*

$$\int_{\zeta_{t;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{t;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{H_t} \frac{\partial h}{\partial \zeta_t} \right) d\zeta_t = \frac{1}{H_t} h(\xi, \eta, \zeta_{t;k+\frac{1}{2}}, \tau) - \frac{1}{H_t} h(\xi, \eta, \zeta_{t;k-\frac{1}{2}}, \tau), \quad (5.51)$$

*Ansatz für den Flußterm:*

$$\mathcal{H}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{h(\xi, \eta, \zeta_{t;k+\frac{1}{2}}, \tau)}{H_t} d\xi d\eta d\tau. \quad (5.52)$$

Die Zusatzterme in der Eisaltersgleichung für kaltes Eis:

*Integration nach  $\zeta_c$  für den Zusatzterme in der Zeitableitung:*

$$\begin{aligned}
 & \int_{\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial z_m}{\partial t} + \frac{e^{a\zeta_c} - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) \frac{\partial A}{\partial \zeta_c} d\zeta_c \\
 &= \left[ \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial z_m}{\partial t} + \frac{e^{a\zeta_c} - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) A \right]_{\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} + \int_{\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial z_m}{\partial t} - \frac{1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) A d\zeta_c \\
 &\approx \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial z_m}{\partial t} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) A(\xi, \eta, \zeta_{c;k+\frac{1}{2}}, \tau) \\
 &\quad - \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial z_m}{\partial t} + \frac{e^{a\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}} - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k-\frac{1}{2}}}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) A(\xi, \eta, \zeta_{c;k-\frac{1}{2}}, \tau) \\
 &\quad + \Delta\zeta_c \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial z_m}{\partial t} - \frac{1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) A(\xi, \eta, \zeta_{c;k}, \tau). \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

Die Integrale über  $\zeta_c$  der Zusatzterme in der  $x$ - und  $y$ -Komponente lassen sich in gleicherweise bestimmen.

*Ansätze:*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial z_m}{\partial t} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) \\
 &\quad \cdot A(\xi, \eta, \zeta_{c;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \tag{5.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{T}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial z_m}{\partial t} - \frac{1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) \\
 &\quad \cdot A(\xi, \eta, \zeta_{c;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial z_m}{\partial x} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \\
 &\quad \cdot f(\xi, \eta, \zeta_{c;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^a - 1}{H_c e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{1}{H_c e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \\ & \cdot f(\xi, \eta, \zeta_{c;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{H_c a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \\ & \cdot g(\xi, \eta, \zeta_{c;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Y}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma} \left( \frac{e^a - 1}{H_c e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial z_m}{\partial y} - \frac{1}{H_c e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \\ & \cdot g(\xi, \eta, \zeta_{c;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Die Zusatzterme in der Eisaltersgleichung für temperiertes Eis:

*Integration nach  $\zeta_t$  für den Zusatzterme in der Zeitableitung:*

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{t;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{t;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) \frac{\partial A}{\partial \zeta_t} \right) d\zeta_t \\ & = \left[ \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) A \right]_{\zeta_{t;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{t;k+\frac{1}{2}}} - \int_{\zeta_{t;k-\frac{1}{2}}}^{\zeta_{t;k+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_t}{\partial t} A \right) d\zeta_t \\ & \approx \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_{t;k+\frac{1}{2}} \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) A(\xi, \eta, \zeta_{t;k+\frac{1}{2}}, \tau) - \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_{t;k-\frac{1}{2}} \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) A(\xi, \eta, \zeta_{t;k-\frac{1}{2}}, \tau) \\ & \quad - \Delta\zeta_t \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_t}{\partial t} A(\xi, \eta, \zeta_{t;k}, \tau). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Die Integrale über  $\zeta_t$  der Zusatzterme in der  $x$ - und  $y$ -Komponente lassen sich wie zuvor bestimmen.

*Ansätze:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + \zeta_{t;k+\frac{1}{2}} \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) \\ & \cdot A(\xi, \eta, \zeta_{t;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_t}{\partial t} A(\xi, \eta, \zeta_{t;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial x} + \zeta_{t;k+\frac{1}{2}} \frac{\partial H_t}{\partial x} \right) \\ &\quad \cdot f(\xi, \eta, \zeta_{t;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma H_t} \frac{\partial H_t}{\partial x} f(\xi, \eta, \zeta_{t;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma H_t} \left( \frac{\partial z_b}{\partial y} + \zeta_{t;k+\frac{1}{2}} \frac{\partial H_t}{\partial y} \right) \\ &\quad \cdot g(\xi, \eta, \zeta_{t;k+\frac{1}{2}}, \tau) d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\widehat{\mathcal{Y}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi \Delta\eta \Delta\tau} \int_{\xi_{i-\frac{1}{2}}}^{\xi_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{1}{\gamma H_t} \frac{\partial H_t}{\partial y} g(\xi, \eta, \zeta_{t;k}, \tau) d\xi d\eta d\tau. \quad (5.66)$$

Unter Verwendung dieser Vereinfachungen und der verschiedenen Ansätze ergibt sich aus der Integration der Gleichung (5.36) über eine Zelle der Form (5.38) folgende Differenzengleichung für kaltes Eis

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{A}_{ijk}^{n+1} - \mathcal{A}_{ijk}^n}{\Delta\tau} - \frac{\mathcal{T}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{T}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} - \widehat{\mathcal{T}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} + \widehat{\mathcal{F}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathcal{X}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{X}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} - \widehat{\mathcal{X}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\eta} + \widehat{\mathcal{G}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathcal{Y}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{Y}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} - \widehat{\mathcal{Y}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\mathcal{H}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{H}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} + \widehat{\mathcal{H}}_{c;ijk}^{n+\frac{1}{2}} = 1, \end{aligned} \quad (5.67)$$

und für die Integration von Gleichung (5.37) folgt die Differenzengleichung für temperier-

tes Eis

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mathcal{A}_{ijk}^{n+1} - \mathcal{A}_{ijk}^n}{\Delta\tau} - \frac{\mathcal{T}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{T}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} + \widehat{\mathcal{T}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} + \widehat{\mathcal{F}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathcal{X}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{X}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} + \widehat{\mathcal{X}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\eta} + \widehat{\mathcal{G}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathcal{Y}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{Y}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_c} + \widehat{\mathcal{Y}}_{t;ijk}^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{\mathcal{H}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{H}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\zeta_t} = 1.
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

Die Gleichungen (5.67) und (5.68) werden nun nach der zu berechnenden Größe  $\mathcal{A}_{ijk}^{n+1}$  aufgelöst, wobei die einzelnen Terme mit  $n + \frac{1}{2}$  zum Zeitschritt  $n$  ausgewertet werden und man somit ein explizites Verfahren erhält. Berücksichtigt man dabei desweiteren die auf Seite 64f eingeführten Randbedingungen und approximiert das Eisalter an einer etwaig vorhandenen CTS, der Grenzschicht zwischen kaltem und temperiertem Eis, in der Art, dass man bei einer Geschwindigkeit genau über der CTS  $(v_x)_{ij\frac{1}{2}}^n \leq 0$  das Eisalter gemäß der Gleichung für  $k_c = 0$  berechnet und bei einer Geschwindigkeit genau unter der CTS  $(v_x)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n > 0$  die Gleichung für  $k_t = k_{t_{\max}}$  verwendet, so erhält man für den kalten Bereich folgendes System von Differenzengleichungen

- $k_c = k_{c_{\max}}$  :

$$\mathcal{A}_{ijk_{c_{\max}}}^{n+1} = 0, \tag{5.69}$$

- $k_c = 1, \dots, k_{c_{\max}} - 1$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ijk}^{n+1} = & \mathcal{A}_{ijk}^n + \Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (\mathcal{T}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{T}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n) + \Delta\tau \widehat{\mathcal{T}}_{c;ijk}^n \\
 & - \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{F}}_{c;ijk}^n \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (\mathcal{X}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{X}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n) + \Delta\tau \widehat{\mathcal{X}}_{c;ijk}^n \\
 & - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta} (\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{G}}_{c;ijk}^n \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (\mathcal{Y}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{Y}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n) + \Delta\tau \widehat{\mathcal{Y}}_{c;ijk}^n \\
 & - \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (\mathcal{H}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{H}_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{H}}_{c;ijk}^n,
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

- $k_c = 0$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ij0}^{n+1} &= \mathcal{A}_{ij0}^n + \Delta\tau + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c}(\mathcal{T}_{c;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{T}_{c;ij0}^n) + \Delta\tau\widehat{\mathcal{T}}_{c;ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}j0}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}j0}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{F}}_{c;ij0}^n + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c}(\mathcal{X}_{c;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{X}_{c;ij0}^n) + \Delta\tau\widehat{\mathcal{X}}_{c;ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta}(\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}0}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}0}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{G}}_{c;ij0}^n + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c}(\mathcal{Y}_{c;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{Y}_{c;ij0}^n) + \Delta\tau\widehat{\mathcal{Y}}_{c;ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c}(\mathcal{H}_{c;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{H}_{c;ij0}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{H}}_{c;ij\frac{1}{4}}^n
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

und entsprechend für den temperierten Bereich das Gleichungssystem

- $k_t = k_{t_{max}}$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ijk_{t_{max}}}^{n+1} &= \mathcal{A}_{ijk_{t_{max}}}^n + \Delta\tau \\
 &\quad + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{T}_{t;ijk_{t_{max}}}^n - \mathcal{T}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{T}}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk_{t_{max}}}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk_{t_{max}}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{F}}_{t;ijk_{t_{max}}}^n \\
 &\quad + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{X}_{t;ijk_{t_{max}}}^n - \mathcal{X}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{X}}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta}(\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k_{t_{max}}}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k_{t_{max}}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{G}}_{t;ijk_{t_{max}}}^n \\
 &\quad + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{Y}_{t;ijk_{t_{max}}}^n - \mathcal{Y}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{Y}}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{H}_{t;ijk_{t_{max}}}^n - \mathcal{H}_{t;ijk_{t_{max}}-\frac{1}{2}}^n),
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

- $k_t = 1, \dots, k_{t_{max}} - 1$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ijk}^{n+1} &= \mathcal{A}_{ijk}^n + \Delta\tau + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{T}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{T}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{T}}_{t;ijk}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}(\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{F}}_{t;ijk}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{X}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{X}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{X}}_{t;ijk}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta}(\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{G}}_{t;ijk}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{Y}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{Y}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n) - \Delta\tau\widehat{\mathcal{Y}}_{t;ijk}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t}(\mathcal{H}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n - \mathcal{H}_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n),
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

- $k_t = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{ij0}^{n+1} = & \mathcal{A}_{ij0}^n + \Delta\tau + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (\mathcal{T}_{t;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{T}_{t;ij0}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{T}}_{t;ij\frac{1}{4}}^n \\
 & - \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta} (\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}j0}^n - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}j0}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{F}}_{t;ij0}^n + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (\mathcal{X}_{t;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{X}_{t;ij0}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{X}}_{t;ij\frac{1}{4}}^n \\
 & - \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta} (\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}0}^n - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}0}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{G}}_{t;ij0}^n + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (\mathcal{Y}_{t;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{Y}_{t;ij0}^n) - \Delta\tau \widehat{\mathcal{Y}}_{t;ij\frac{1}{4}}^n \\
 & - \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (\mathcal{H}_{t;ij\frac{1}{2}}^n - \mathcal{H}_{t;ij0}^n). \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Differenzengleichungssystemen wird nun ein numerisches Lösungsverfahren hergeleitet, indem die gemittelten Werte, wie schon im allgemeinen Fall in Gleichung (5.20) und Gleichung (5.21) aufgeführt, mit Näherungen ersetzt werden.

Diese lautet für das Eisalter

$$\mathcal{A}_{ijk}^n = A_{ijk}^n \tag{5.75}$$

und für die Flußterme

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk}^n = \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{i+\frac{1}{2}j}}} A_{i+\frac{1}{2}jk}^n (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \theta_{i+\frac{1}{2}jk}^n, \tag{5.76}$$

$$\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k}^n = \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij+\frac{1}{2}}}} A_{ij+\frac{1}{2}k}^n (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n - \phi_{ij+\frac{1}{2}k}^n, \tag{5.77}$$

$$\mathcal{H}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n = \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - \psi_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n, \tag{5.78}$$

$$\mathcal{H}_{c;ij0}^n = \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a} A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n - \psi_{c;ij0}^n, \tag{5.79}$$

$$\mathcal{H}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - \psi_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n, \tag{5.80}$$

$$\mathcal{H}_{t;ij0}^n = \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n - \psi_{t;ij0}^n, \tag{5.81}$$

$$\mathcal{H}_{t;ijk_{t\max}}^n = \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} A_{ijk_{t\max}}^n (v_z)_{ijk_{t\max}}^n - \psi_{t;ijk_{t\max}}^n, \tag{5.82}$$

mit den Dissipations-Limiter  $\theta_{i+\frac{1}{2}jk}^n$ ,  $\phi_{ij+\frac{1}{2}k}^n$ ,  $\psi_{c/t;ijk+\frac{1}{2}}^n$  und  $\psi_{c/t;ij0}^n$ .

Für die verschiedenen Zusatzterme ergeben sich folgende Näherungen

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n &= \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial t} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial(H_c)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ijk+\frac{1}{2}}^n \\ &= T_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n,\end{aligned}\tag{5.83}$$

$$\mathcal{T}_{c;ij0}^n = \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ij0}^n = T_{c;ij0}^n A_{ij0}^n,\tag{5.84}$$

$$\mathcal{T}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n = \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial t} + \zeta_{t;k+\frac{1}{2}} \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ijk+\frac{1}{2}}^n = T_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n,\tag{5.85}$$

$$\mathcal{T}_{t;ij0}^n = \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ij0}^n = T_{t;ij0}^n A_{ij0}^n,\tag{5.86}$$

$$\mathcal{T}_{t;ijk_{\max}}^n = \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial t} + \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ijk_{\max}}^n = T_{t;ijk_{\max}}^n A_{ijk_{\max}}^n,\tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial x} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial(H_c)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk+\frac{1}{2}}^n \\ &= X_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk+\frac{1}{2}}^n,\end{aligned}\tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{c;ij0}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ij0}^n (v_x)_{ij0}^n \\ &= X_{c;ij0}^n A_{ij0}^n (v_x)_{ij0}^n,\end{aligned}\tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial x} + \zeta_{t;k+\frac{1}{2}} \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk+\frac{1}{2}}^n \\ &= X_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk+\frac{1}{2}}^n,\end{aligned}\tag{5.90}$$

$$\mathcal{X}_{t;ij0}^n = \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ij0}^n (v_x)_{ij0}^n = X_{t;ij0}^n A_{ij0}^n (v_x)_{ij0}^n,\tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{t;ijk_{\max}}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial x} + \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ijk_{\max}}^n (v_x)_{ijk_{\max}}^n \\ &= X_{t;ijk_{\max}}^n A_{ijk_{\max}}^n (v_x)_{ijk_{\max}}^n,\end{aligned}\tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial y} + \frac{e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}} - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}}} \frac{\partial(H_c)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk+\frac{1}{2}}^n \\ &= Y_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk+\frac{1}{2}}^n,\end{aligned}\tag{5.93}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{c;ij0}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a e^{a\zeta_{c;0}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ij0}^n (v_y)_{ij0}^n \\ &= Y_{c;ij0}^n A_{ij0}^n (v_y)_{ij0}^n,\end{aligned}\tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial y} + \zeta_{t; k+\frac{1}{2}} \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk+\frac{1}{2}}^n \\ &= Y_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk+\frac{1}{2}}^n,\end{aligned}\tag{5.95}$$

$$\mathcal{Y}_{t;ij0}^n = \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ij0}^n (v_y)_{ij0}^n = Y_{t;ij0}^n A_{ij0}^n (v_y)_{ij0}^n,\tag{5.96}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{t;ijk_{t\max}}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{\partial(z_b)_{ij}^n}{\partial y} + \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ijk_{t\max}}^n (v_y)_{ijk_{t\max}}^n \\ &= Y_{t;ijk_{t\max}}^n A_{ijk_{t\max}}^n (v_y)_{ijk_{t\max}}^n.\end{aligned}\tag{5.97}$$

Und für die Mittelwerte schreibt man

$$\widehat{\mathcal{F}}_{ijk}^n = \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \xi} \frac{\sqrt{(g_{22})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n,\tag{5.98}$$

$$\widehat{\mathcal{G}}_{ijk}^n = \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(g_{11})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n,\tag{5.99}$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{c;ijk}^n = \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} A_{ijk}^n (v_z)_{ijk}^n,\tag{5.100}$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{c;ijk}^n = \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial t} - \frac{1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial(H_c)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ijk}^n = \widehat{T}_{c;ijk}^n A_{ijk}^n,\tag{5.101}$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_{t;ijk}^n = \left( \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial t} \right) A_{ijk}^n = \widehat{T}_{t;ij}^n A_{ijk}^n,\tag{5.102}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}}_{c;ijk}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial x} - \frac{1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial(H_c)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n \\ &= \widehat{X}_{c;ijk}^n A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n,\end{aligned}\tag{5.103}$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_{t;ijk}^n = \frac{1}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} \left( \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} \frac{\partial(H_t)_{ij}^n}{\partial x} \right) A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n = \widehat{X}_{t;ij}^n A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n,\tag{5.104}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{Y}}_{c;ijk}^n &= \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial(z_m)_{ij}^n}{\partial y} - \frac{1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \frac{\partial(H_c)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n \\ &= \widehat{Y}_{c;ijk}^n A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n,\end{aligned}\tag{5.105}$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_{t;ijk}^n = \frac{1}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} \left( \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} \frac{\partial (H_t)_{ij}^n}{\partial y} \right) A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n = \hat{Y}_{t;ij}^n A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n. \quad (5.106)$$

Definiert man nun die gemittelten Altersterme in den Flußtermen gemäß des “First Order Upstream” Verfahrens in Abhängigkeit von der Fließrichtung, in voller Analogie zu Gleichung (5.25), und vernachlässigt erneut die verschiedenen Dissipations-Limiter, so erhält man unter Verwendung dieser Näherungen folgendes Iterationsschema für den Kalteisbereich

- $k_c = k_{c_{\max}}$ :

$$A_{ijk_{\max}}^{n+1} = 0, \quad (5.107)$$

- $k_c = 1, \dots, k_{c_{\max}} - 1$ :

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{n+1} = & A_{ijk}^n + \Delta\tau \\
 & - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \left[ \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n) \right. \\
 & \quad - \frac{A_{i+1jk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i+1j}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n) \\
 & \quad - \frac{A_{i-1jk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i-1j}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\
 & \quad \left. + \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \right] \\
 & - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \left[ \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n) \right. \\
 & \quad - \frac{A_{ij+1k}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij+1}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n) \\
 & \quad - \frac{A_{ij-1k}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij-1}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\
 & \quad \left. + \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \right] \\
 & - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\zeta_c} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a} \right) \left[ \frac{A_{ijk}^n}{e^{a\zeta_{c;k}}} (|(v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n) \right. \\
 & \quad - \frac{A_{ijk+1}^n}{e^{a\zeta_{c;k+1}}} (|(v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n) \\
 & \quad - \frac{A_{ijk-1}^n}{e^{a\zeta_{c;k-1}}} (|(v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\
 & \quad \left. + \frac{A_{ijk}^n}{e^{a\zeta_{c;k}}} (|(v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \right] \\
 & + \Delta\tau \hat{T}_{c;ijk}^n A_{ijk}^n \\
 & + \Delta\tau \left( \hat{X}_{c;ijk}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \xi} \frac{\sqrt{(g_{22})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n \\
 & + \Delta\tau \left( \hat{Y}_{c;ijk}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(g_{11})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n \\
 & - \Delta\tau \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;k}}} \right) A_{ijk}^n (v_z)_{ijk}^n \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (T_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n - T_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n A_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (X_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - X_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n A_{ijk-\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (Y_{c;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - Y_{c;ijk-\frac{1}{2}}^n A_{ijk-\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk-\frac{1}{2}}^n),
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

- $k_c = 0$ :

$$\begin{aligned}
 A_{ij0}^{n+1} &= A_{ij0}^n + \Delta\tau \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n) \\ &- \frac{A_{i+1j0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i+1j}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n) \\ &- \frac{A_{i-1j0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i-1j}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n) \\ &+ \frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n) \end{aligned} \right] \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n) \\ &- \frac{A_{ij+10}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij+1}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n) \\ &- \frac{A_{ij-10}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij-1}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n) \\ &+ \frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n) \end{aligned} \right] \\
 &\quad - \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n a} \right) \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{ij0}^n}{2} (|(v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n) \\ &- \frac{A_{ij1}^n}{2e^{a\zeta_{c;1}}} (|(v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n) \\ &- A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n \end{aligned} \right] \\
 &\quad + \Delta\tau \hat{T}_{c;ij\frac{1}{4}}^n A_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad + \Delta\tau \left( \hat{X}_{c;ij\frac{1}{4}}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \xi} \frac{\sqrt{(g_{22})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ij\frac{1}{4}}^n (v_x)_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad + \Delta\tau \left( \hat{Y}_{c;ij\frac{1}{4}}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(g_{11})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ij\frac{1}{4}}^n (v_y)_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad - \Delta\tau \left( \frac{e^a - 1}{(H_c)_{ij}^n e^{a\zeta_{c;\frac{1}{4}}}} \right) A_{ij\frac{1}{4}}^n (v_z)_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (T_{c;ij\frac{1}{2}}^n A_{ij\frac{1}{2}}^n - T_{c;ij0}^n A_{ij0}^n) \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (X_{c;ij\frac{1}{2}}^n A_{ij\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ij\frac{1}{2}}^n - X_{c;ij0}^n A_{ij0}^n (v_x)_{ij0}^n) \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_c} (Y_{c;ij\frac{1}{2}}^n A_{ij\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ij\frac{1}{2}}^n - Y_{c;ij0}^n A_{ij0}^n (v_y)_{ij0}^n)
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

und für den temperierten Bereich ergibt sich analog

- $k_t = k_{t_{\max}}$ :

$$\begin{aligned}
 A_{ijk_{\max}}^{n+1} &= A_{ijk_{t_{\max}}}^n + \Delta\tau \\
 &- \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \left[ \frac{A_{ijk_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n) \right. \\
 &\quad - \frac{A_{i+1jk_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i+1j}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n) \\
 &\quad - \frac{A_{i-1jk_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i-1j}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n) \\
 &\quad \left. + \frac{A_{ijk_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk_{t_{\max}}}^n) \right] \\
 &- \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \left[ \frac{A_{ijk_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n) \right. \\
 &\quad - \frac{A_{ij+1k_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij+1}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n) \\
 &\quad - \frac{A_{ij-1k_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij-1}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n) \\
 &\quad \left. + \frac{A_{ijk_{t_{\max}}}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k_{t_{\max}}}^n) \right] \\
 &- \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} \left( \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} \right) \left[ \frac{A_{ijk_{t_{\max}}}^n (v_z)_{ijk_{t_{\max}}}^n}{2} \right. \\
 &\quad - \frac{A_{ijk_{t_{\max}}-1}^n}{2} (|(v_z)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n) \\
 &\quad \left. + \frac{A_{ijk_{t_{\max}}}^n}{2} (|(v_z)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n) \right] \\
 &+ \Delta\tau \hat{T}_{t;ij}^n A_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{4}}^n \\
 &+ \Delta\tau \left( \hat{X}_{t;ij}^n - \frac{\partial\sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial\xi} \frac{\sqrt{(g_{22})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{4}}^n (v_x)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{4}}^n \\
 &+ \Delta\tau \left( \hat{Y}_{t;ij}^n - \frac{\partial\sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial\eta} \frac{\sqrt{(g_{11})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{4}}^n (v_y)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{4}}^n \\
 &+ \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (T_{t;ijk_{t_{\max}}}^n A_{ijk_{t_{\max}}}^n - T_{t;ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n A_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n) \\
 &+ \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (X_{t;ijk_{t_{\max}}}^n A_{ijk_{t_{\max}}}^n (v_x)_{ijk_{t_{\max}}}^n - X_{t;ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n A_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n) \\
 &+ \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (Y_{t;ijk_{t_{\max}}}^n A_{ijk_{t_{\max}}}^n (v_y)_{ijk_{t_{\max}}}^n - Y_{t;ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n A_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk_{t_{\max}}-\frac{1}{2}}^n),
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

- $k_t = 1, \dots, k_{t_{\max}} - 1$ :

$$\begin{aligned}
 A_{ijk}^{n+1} = & A_{ijk}^n + \Delta\tau \\
 & - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \left[ \begin{aligned} & \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n) \\ & - \frac{A_{i+1jk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i+1j}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}jk}^n) \\ & - \frac{A_{i-1jk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i-1j}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \\ & + \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}jk}^n) \end{aligned} \right] \\
 & - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \left[ \begin{aligned} & \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n) \\ & - \frac{A_{ij+1k}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij+1}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}k}^n) \\ & - \frac{A_{ij-1k}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij-1}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \\ & + \frac{A_{ijk}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}k}^n) \end{aligned} \right] \\
 & - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\zeta_t} \left( \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} \right) \left[ \begin{aligned} & A_{ijk}^n (|(v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{ijk+1}^n (|(v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk+\frac{1}{2}}^n) \\ & - A_{ijk-1}^n (|(v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\ & + A_{ijk}^n (|(v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned} \right] \\
 & + \Delta\tau \widehat{T}_{t;ij}^n A_{ijk}^n \\
 & + \Delta\tau \left( \widehat{X}_{t;ij}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \xi} \frac{\sqrt{(g_{22})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ijk}^n (v_x)_{ijk}^n \\
 & + \Delta\tau \left( \widehat{Y}_{t;ij}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(g_{11})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ijk}^n (v_y)_{ijk}^n \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (T_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n - T_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n A_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (X_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - X_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n A_{ijk-\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ijk-\frac{1}{2}}^n) \\
 & + \frac{\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (Y_{t;ijk+\frac{1}{2}}^n A_{ijk+\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk+\frac{1}{2}}^n - Y_{t;ijk-\frac{1}{2}}^n A_{ijk-\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ijk-\frac{1}{2}}^n),
 \end{aligned} \tag{5.111}$$

- $k_t = 0$ :

$$\begin{aligned}
 A_{ij0}^{n+1} &= A_{ij0}^n + \Delta\tau \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\xi} \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n| + (v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n) \\ &- \frac{A_{i+1j0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i+1j}}} (|(v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n| - (v_x)_{i+\frac{1}{2}j0}^n) \\ &- \frac{A_{i-1j0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{i-1j}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n| + (v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n) \\ &+ \frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{11})_{ij}}} (|(v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n| - (v_x)_{i-\frac{1}{2}j0}^n) \end{aligned} \right] \\
 &\quad - \frac{\Delta\tau}{2\Delta\eta} \left[ \begin{aligned} &\frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n| + (v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n) \\ &- \frac{A_{ij+10}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij+1}}} (|(v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n| - (v_y)_{ij+\frac{1}{2}0}^n) \\ &- \frac{A_{ij-10}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij-1}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n| + (v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n) \\ &+ \frac{A_{ij0}^n}{\sqrt{(g_{22})_{ij}}} (|(v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n| - (v_y)_{ij-\frac{1}{2}0}^n) \end{aligned} \right] \\
 &\quad - \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} \left( \frac{1}{(H_t)_{ij}^n} \right) \left[ \begin{aligned} &A_{ij0}^n \frac{1}{2} (|(v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n| + (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n) \\ &- A_{ij1}^n \frac{1}{2} (|(v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n| - (v_z)_{ij\frac{1}{2}}^n) \\ &- A_{ij0}^n (v_z)_{ij0}^n \end{aligned} \right] \\
 &\quad + \Delta\tau \hat{T}_{t;ij}^n A_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad + \Delta\tau \left( \hat{X}_{t;ij}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \xi} \frac{\sqrt{(g_{22})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ij\frac{1}{4}}^n (v_x)_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad + \Delta\tau \left( \hat{Y}_{t;ij}^n - \frac{\partial \sqrt{(g_{11}g_{22})_{ij}}}{\partial \eta} \frac{\sqrt{(g_{11})_{ij}}}{(g_{11}g_{22})_{ij}} \right) A_{ij\frac{1}{4}}^n (v_y)_{ij\frac{1}{4}}^n \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (T_{t;ij\frac{1}{2}}^n A_{ij\frac{1}{2}}^n - T_{t;ij0}^n A_{ij0}^n) \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (X_{t;ij\frac{1}{2}}^n A_{ij\frac{1}{2}}^n (v_x)_{ij\frac{1}{2}}^n - X_{t;ij0}^n A_{ij0}^n (v_x)_{ij0}^n) \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\zeta_t} (Y_{t;ij\frac{1}{2}}^n A_{ij\frac{1}{2}}^n (v_y)_{ij\frac{1}{2}}^n - Y_{t;ij0}^n A_{ij0}^n (v_y)_{ij0}^n).
 \end{aligned} \tag{5.112}$$

Die verschiedenen in diesen Iterationsschemata auftretenden Terme, die nicht an den angegebenen Koordinaten definiert sind, wie z.B.  $(v_x)_{ijk}^n$  oder  $\zeta_{c;k+\frac{1}{2}}$  werden durch eine einfach Mittelung bestimmt. Die Ableitungen von  $H_c$ ,  $H_t$ ,  $z_b$  und  $z_m$  nach der Zeit  $t$  bzw. der Ko-

ordinatenrichtung  $x$  oder  $y$  werden durch zentrale Differenzen approximiert. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente an der unteren Grenze des kalten bzw. temperierten Eises  $(v_z)_{ij0}$  wird durch  $(v_z)_{ij\frac{1}{2}}$  auf dem Staggered Grid ausgedrückt.



## 6 Numerische Simulationen

Als Grundlage für die Diskussion des neu implementierten Verfahrens zur Eisalterberechnung werden drei numerische Experimente, die sich nur hinsichtlich des Betrages des verwendeten geothermen Wärmeflusses unterscheiden, durchgeführt. In Szenario 1 wird ein Wert von  $55 \text{ mW/m}^2$  verwendet, in Szenario 2 beträgt der Wert  $50 \text{ mW/m}^2$  und in Szenario 3 nur noch  $45 \text{ mW/m}^2$ . In allen drei Fällen wird das antarktische Eisschild auf dem in Kapitel [4] vorgestellten Gebiet mit einer horizontalen Auflösung von 40 km simuliert, was zu einem Gitternetz mit  $140 \times 120$  Knoten in der Horizontalen führt. Die Vertikalrichtung wird durch 80 Knoten im Kalteisbereich und weiteren 10 Knoten in einer etwaig vorhandenen temperierten Schicht abgedeckt. Der exponentielle Streckparameter  $a$  in der  $\sigma$ -Transformation des Kalteisbereiches wird mit einem Wert von 2 angesetzt.

Für alle drei Szenarien wird zunächst ein “Steady-State”-Lauf durchgeführt, d.h. über einen Zeitraum von 100 000 Jahren wird das Aufwachsen eines Eisschildes auf dem entspannten Boden  $z_{b_0}$  (siehe [4.3]) unter heutigen Klimabedingungen (Temperatur und Schneefall) berechnet. Das Ergebnis dieser Rechnung dient als Ausgangszustand für die anschließende tatsächliche Simulation der Dynamik und Thermodynamik des antarktischen Eisschildes unter dem Einfluß der klimatischen Veränderungen der, durch den Vostok-Record (Kapitel [4.8]) abgedeckten, letzten vier Klimazyklen (422 000 Jahre). Die Rechnungen erwiesen sich für eine Zeitschrittweite von 10 Jahren für die Berechnung der Dynamik sowie der Thermodynamik als stabil. Für die Steady-State-Läufe zeigt sich eine Zeitschrittweite von 50 Jahren als völlig ausreichend.

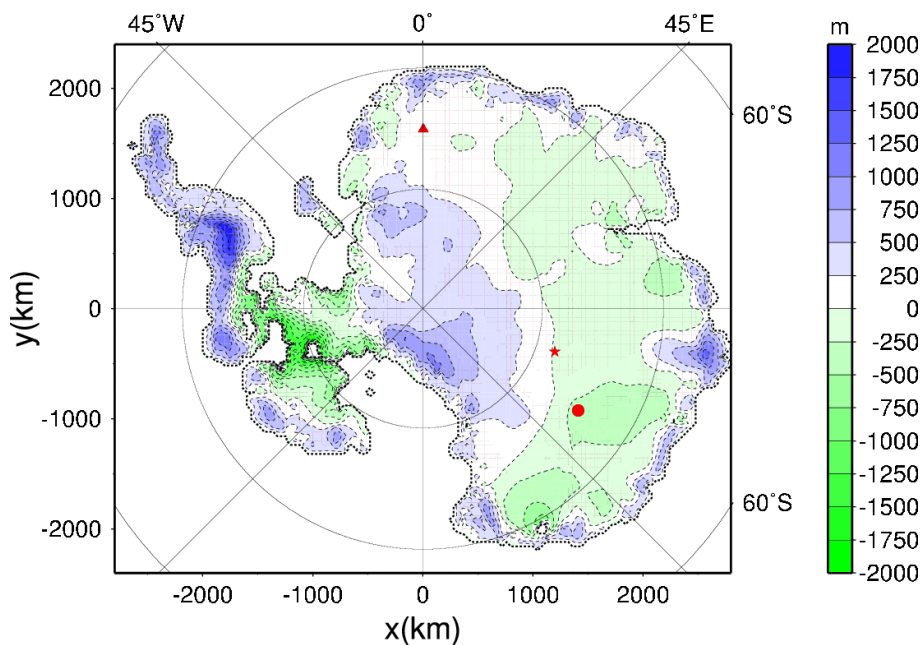
### 6.1 Einfluß des geothermen Wärmeflusses

Zunächst werden die Fähigkeiten von SICOPOLIS das heutige antarktische Eisschild zu reproduzieren untersucht. Hierfür wird die jeweilige Höhe der Eisoberfläche über Normal Null mit den Meßdaten, wie sie in Abbildung 4.2 vorgestellt wurden, verglichen. In den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 sind die Abweichungen der berechneten Eisoberflächentopographie als Differenzen (berechnete Werte  $z_s$  minus Meßwerte  $z_{s,\text{input}}$ ) dargestellt. Es zeigt

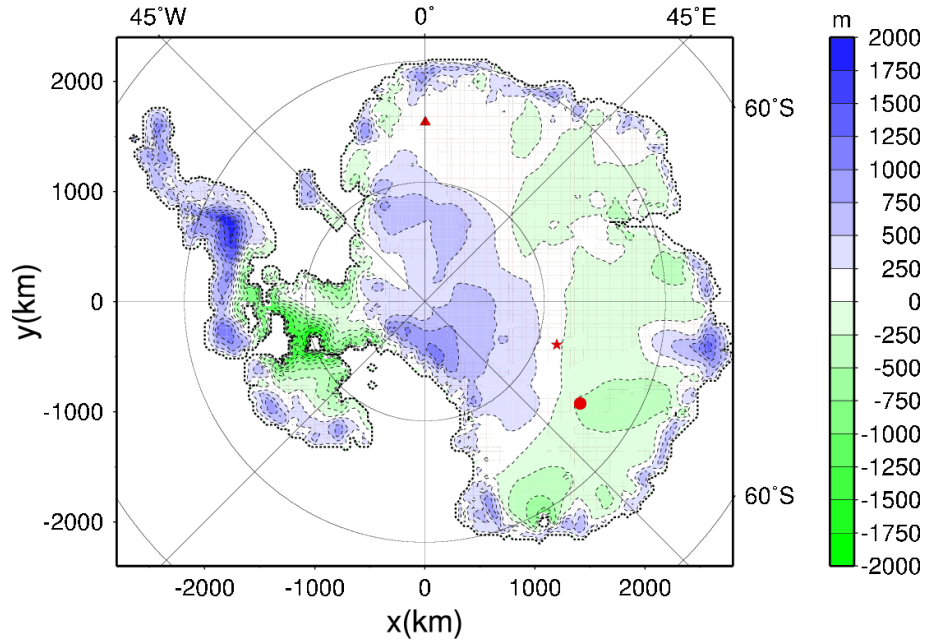
sich, dass für alle drei Szenarien im östlichen Teil der Ostantarktis ein zu flaches Eisschild berechnet wird, während im westliche Teil, nahe der beiden großen Schelfeise, Ross und Ronne-Filchner, und vorallem südlicher des Transantarktischen Gebirges, im allgemeinen eine zu hohe Eisdicke ermittelt wird. Ganz ähnlich sieht die Situation in der Westantarktis aus. Die berechnete Eishöhe auf der antarktischen Halbinsel erweist sich als zu hoch, während sie zwischen den großen Schelfeisen zu niedrig ist. Des weiteren zeigt sich, dass in der Westantarktis nur minimale Unterschiede für die drei gewählten Werte des geothermen Wärmeflusses auftreten, während sich in der Ostantarktis hauptsächlich die Verteilung der Extremwerte ändert. In Hinblick auf eine gleichmäßige Verteilung der Abweichungen und einer Reduzierung extremer Werte wird Szenario 2 im Folgenden genauer betrachtet und als Grundlage für weitere Rechnungen verwendet.

	Szenario 1	Szenario 2	Szenario 3	Realität[39]
Eisvolumen	$25.93 \cdot 10^6 \text{ km}^3$	$26.74 \cdot 10^6 \text{ km}^3$	$27.65 \cdot 10^6 \text{ km}^3$	$29.30 \cdot 10^6 \text{ km}^3$

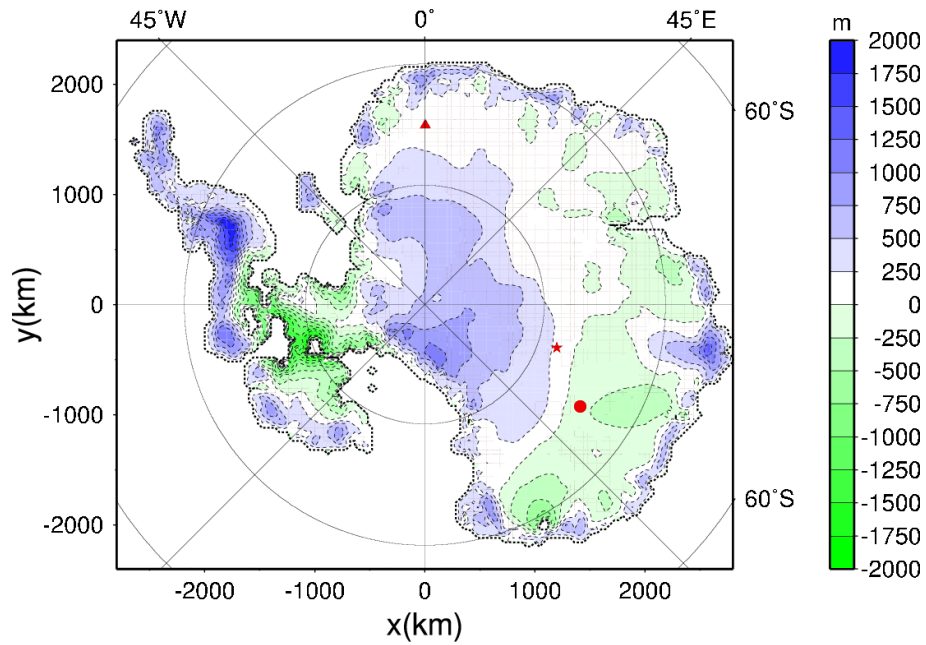
Vergleicht man nun noch das sich aus den verschiedenen Rechnungen ergebende Eisvolumen miteinander und mit dem des realen antarktischen Eisschildes (siehe Tabelle), so zeigt sich, dass für alle drei Szenarien ein zu kleines Eisschild berechnet wird. Die Variation des geothermen Wärmeflusses, der über dem Rechengebiet konstant gehalten wird, erweist sich also als wenig wirksam die Qualität der Simulation zu verbessern.



**Abbildung 6.1:** Abweichungen der simulierten Eisoberflächentopographie (Szenario 1) von den Meßwerten in Metern ( $z_s - z_{s,\text{input}}$ ):



**Abbildung 6.2:** Abweichungen der simulierten Eisoberflächentopographie (Szenario 2) von den Meßwerten in Metern ( $z_s - z_{s,input}$ ):

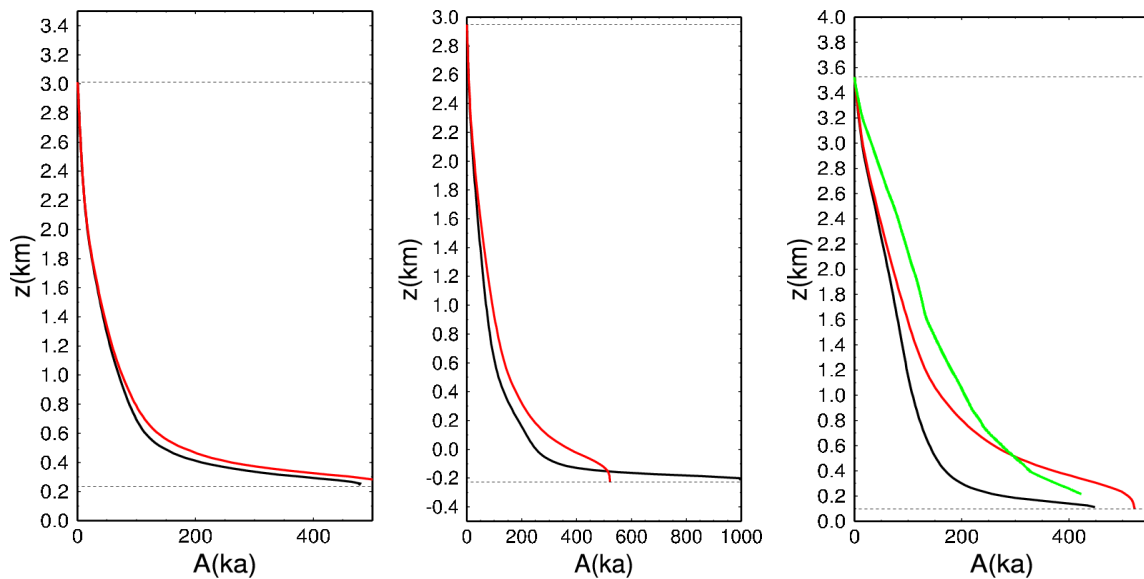


**Abbildung 6.3:** Abweichungen der simulierten Eisoberflächentopographie (Szenario 3) von den Meßwerten in Metern ( $z_s - z_{s,input}$ ):

## 6.2 Eisalter

Der Vergleich der Ergebnisse des in dieser Arbeit hergeleiteten Lösungsverfahrens mit den Ergebnissen der bisherigen Eisalterberechnungsmethode<sup>1</sup> (siehe [15] und [38]), sowie der für den Vostok-Bohrkern verwendeten Datierung [36] ergibt ein uneinheitliches Bild.

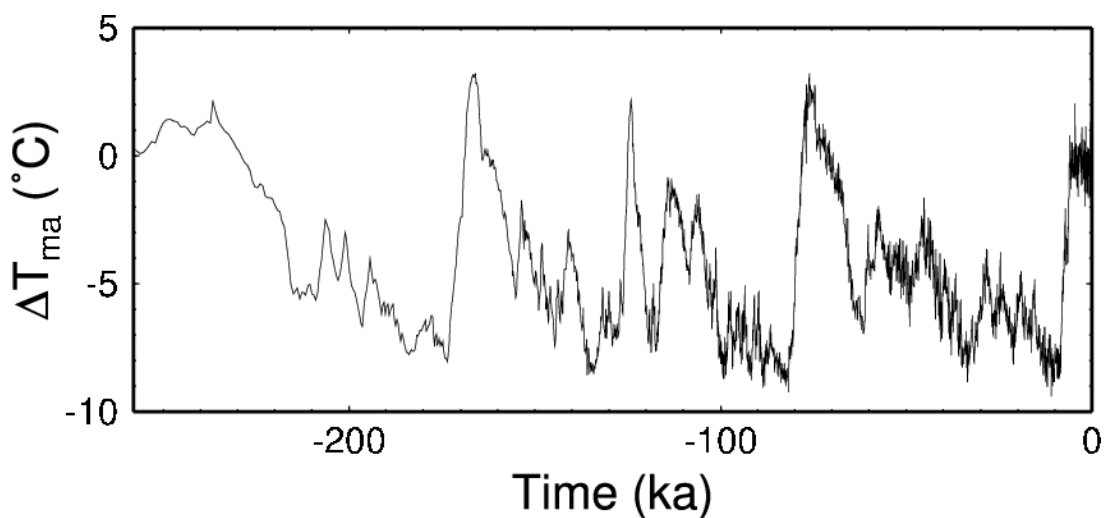
Zum einen zeigen die Graphen der Altersverteilung über die Tiefe (die schwarzen Kurven in Abb. 6.4) im Vergleich zu den mit der bisherigen Methode gewonnenen Plots (die roten Kurven in Abb. 6.4) und der für den Vostok-Bohrkern verwendeten Datierung (grüne Kurve in 6.4c), dass das neue Verfahren über weite Teile der Eindringtiefe einen zu geringeren Altersanstieg produziert, während dann in Bodennähe ein starkes Ansteigen des Eisalters auftritt. Allerdings ist der erreichte Maximalwert mit Ausnahme von Dome C geringer als der des alten Verfahrens, was durchaus sinnvoll erscheint. Das recht hohe Eisalter, das am Boden von Dome C erreicht wird, erweist sich bei genauerer Betrachtung als nicht grundlegend falsch, da für einen Dom die Horizontalkomponenten der Fließgeschwindigkeit in Bodennähe naturgemäß sehr klein sind.



**Abbildung 6.4:** Berechnete Altersverteilungen über die Tiefe für die verschiedene Bohrpositionen, links Kohlen-Station in der Nähe von DML05, Mitte Dome C und rechts Vostok-Station. Schwarz: Neues Verfahren. Rot: Bisheriges Verfahren, Grün: Altersverteilungen über die Tiefe für den Vostok-Bohrkern nach Petit et al. [36].

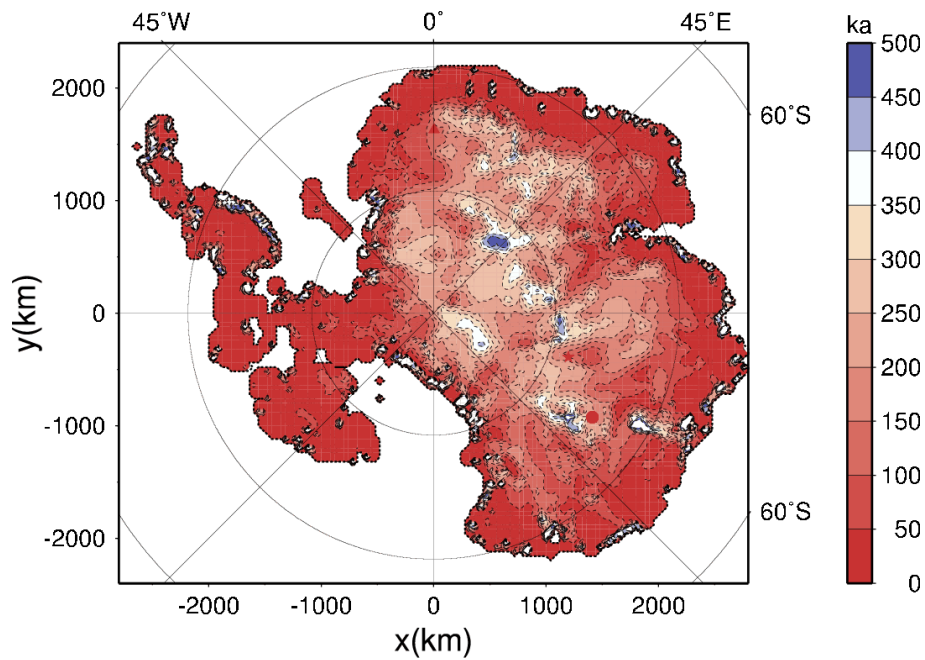
<sup>1</sup>Numerische Integration der Gleichung (5.2) mittels zentraler Differenzen. Um Stabilität zu gewährleisten wird die Gleichung auf der rechten Seite durch den künstlichen, numerischen Diffusionsterm  $D_A \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ , mit der kleinen Diffusivität  $D_A$ , ergänzt.

Besonders augenfällig wird der zu geringe Altersanstieg des neuen Verfahrens, wenn man die Temperaturdaten, die aus dem Vostok-Bohrkern gewonnen wurden, mit der entsprechenden Alterverteilung über die Tiefe (die schwarze Kurve in Abb. 6.4c) neu datiert. Die so gewonnene zeitliche Entwicklung der Temperatur (Abb. 6.5) deckt einen für vier Klimazyklen viel zu kurzen Zeitraum der Erdgeschichte ab. Die zwischen den einzelnen Warm- bzw. Eiszeiten liegenden Zeitintervalle sind deutlich zu kurz und noch dazu von unterschiedlicher Länge, selbst die aus diesem Graphen ersichtliche Zeitspanne zwischen der letzten, der Eem-Warmzeit und der heutigen Neo-Warmzeit ist deutlich kürzer als die erwarteten 96000 Jahre (siehe Seite 14 und [35, 20, 2]).

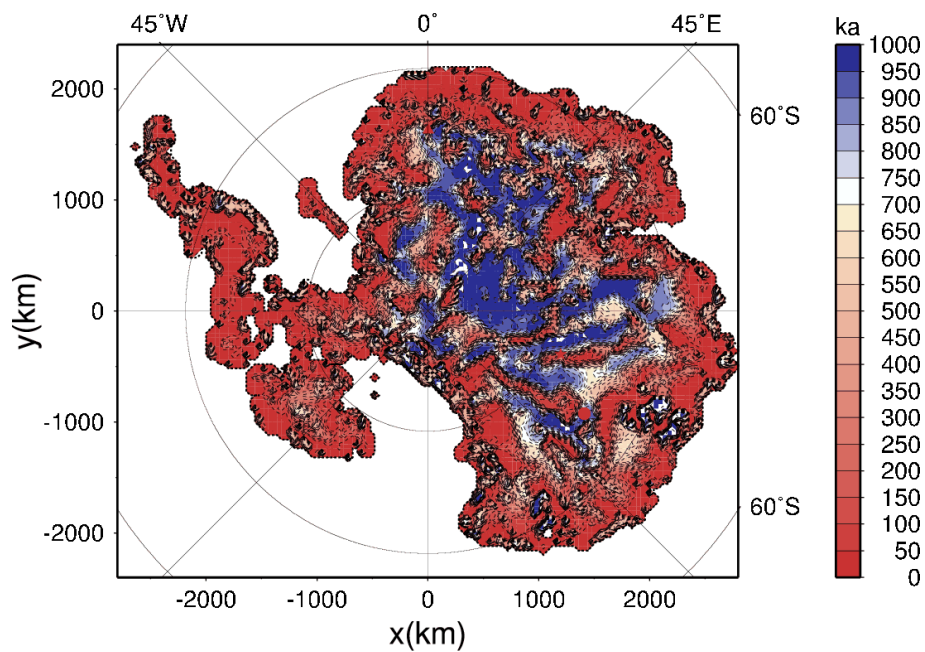


**Abbildung 6.5:** Die aus dem Vostok-Bohrkern gewonnene Entwicklung der Jahresmitteltemperatur datiert nach dem neuen Verfahren. (siehe auch 6.4 c). Variation der Temperatur relativ zu heute in Grad Celsius. Siehe zum Vergleich Abb. 4.7.

Andererseits zeigen die Abbildungen des Eisalters auf 90% Tiefe (Abb. 6.6) bzw. 99% Tiefe (Abb. 6.7) ein glaubhafteres Bild des Eisalters, das stark mit der Bodentopographie verknüpft ist. Hingegen zeigen die, durch das alte Verfahren berechneten, Abbildungen auf 90% Tiefe (Abb. 6.8) bzw. 99% Tiefe (Abb. 6.9) ein recht einheitliches Eisalter, hohe Werte werden nur am Rand des Eisschildes am Boden diverser Eisströme erreicht. Ein Einfluß der Bodentopographie auf das Eisalter in Bodennähe erscheint aber recht wahrscheinlich, da sich in Täler bzw. in Strömungsrichtung gesehen hinter Bergen so etwas wie “Totwasser” ausbilden können, also Bereiche in denen die Fließgeschwindigkeit des Eises Null beträgt, und somit Eis in diesen Bereichen für lange Zeit verbleibt.

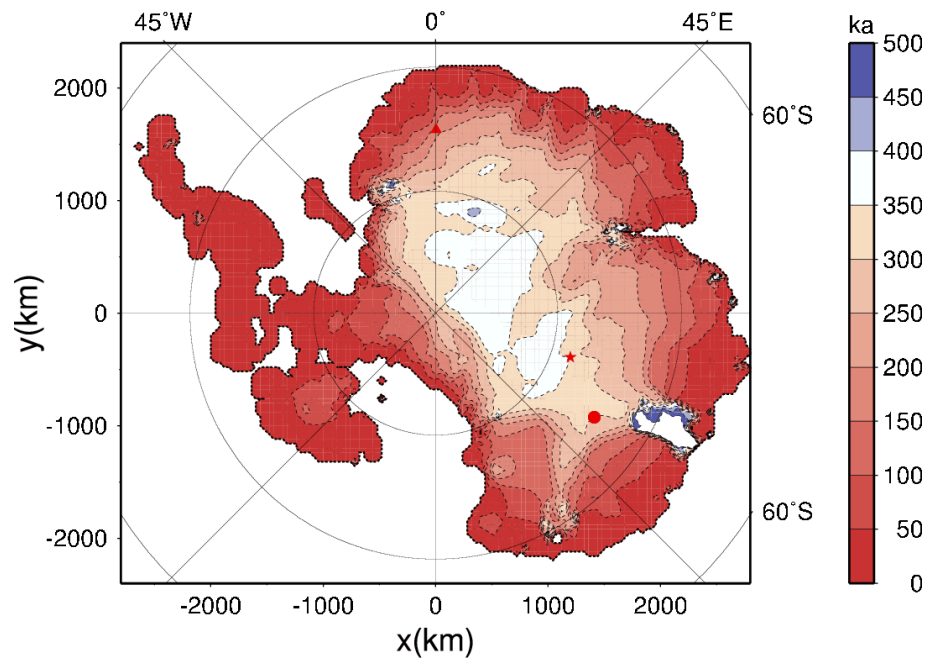


**Abbildung 6.6:** Mit dem neuen Verfahren berechnetes Eisalter in ka auf 90% Tiefe:

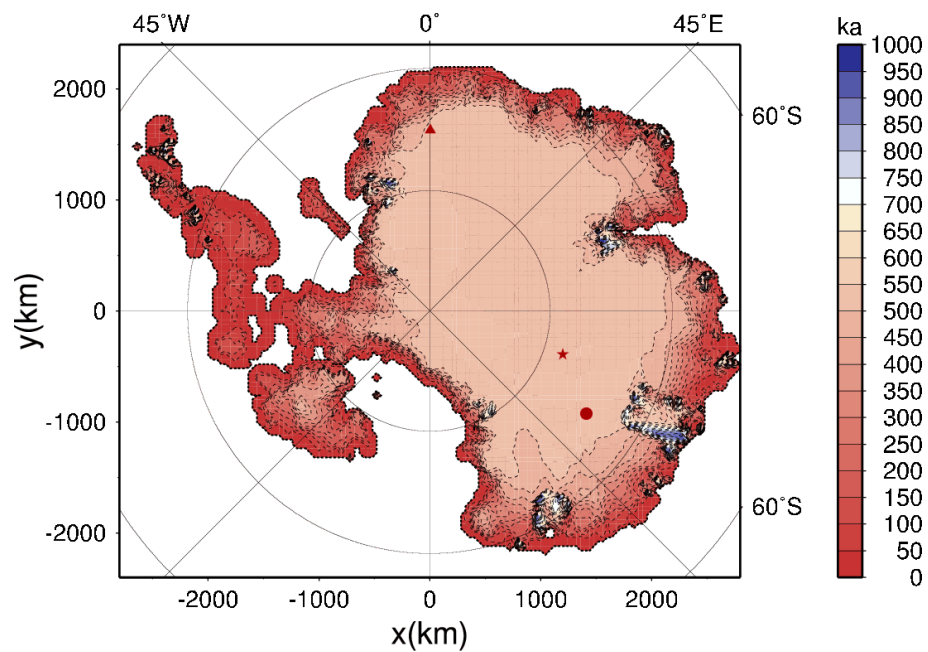


**Abbildung 6.7:** Mit dem neuen Verfahren berechnetes Eisalter in ka auf 99% Tiefe:





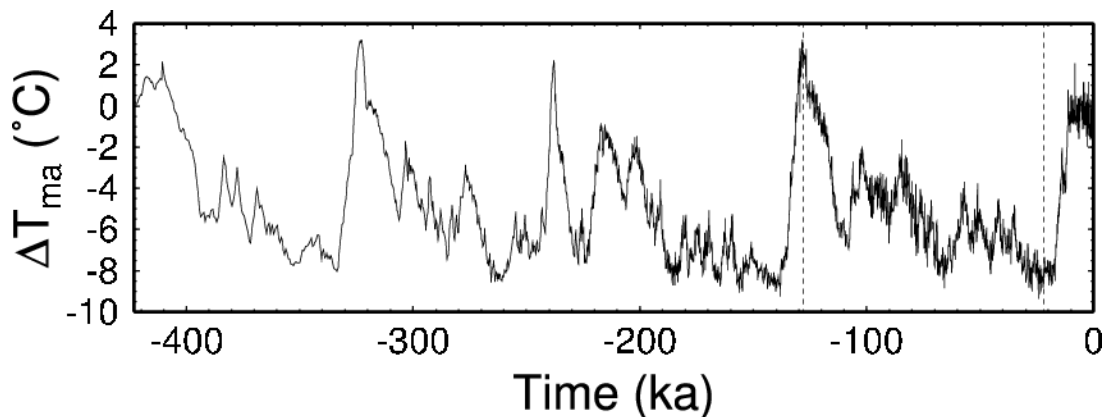
**Abbildung 6.8:** Mit bisheriger Berechnungsmethode ermitteltes Eisalter in ka auf 90% Tiefe:



**Abbildung 6.9:** Mit bisheriger Berechnungsmethode ermitteltes Eisalter in ka auf 99% Tiefe:

### 6.3 Heute, Gestern, Morgen

Nun ist es aber auch interessant, das antarktische Eisschild zu anderen Zeiten zu betrachten. Wie sah das Eisschild während einer Eiszeit oder zu einer früheren Warmzeit aus? Welchen Einfluß hat die globale Erwärmung auf das Eisschild? Kurz wie verändert sich das Eisschild unter dem Einfluß der verschiedenen Klimazustände in Ausdehnung bzw. Eismächtigkeit und in seiner Dynamik?



**Abbildung 6.10:** Entwicklung der Jahresmitteltemperatur über die letzten 422 000 Jahre. Die punktierten Linien bei 22 000 bzw. 128 000 markieren das Last-Glacial-Maximum bzw. die Eem-Warmzeit.

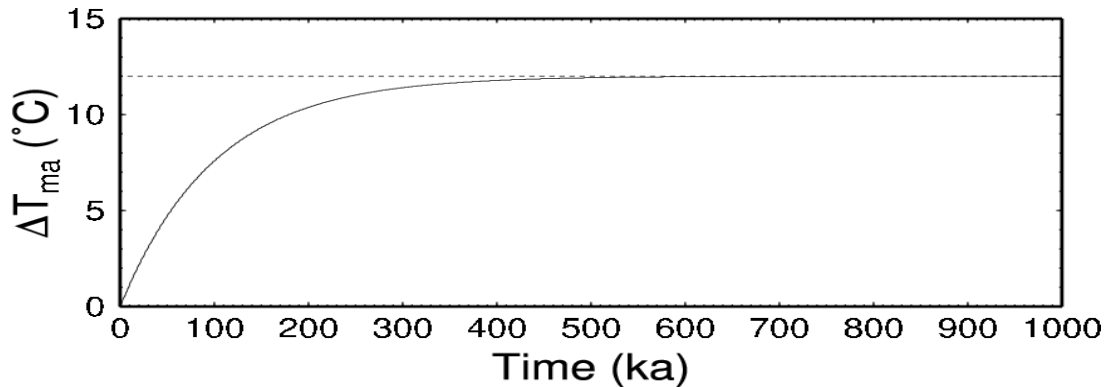
Um diesen Fragen nachzugehen, werden nun die Ergebnisse des Szenarios 2 zum einen bei 22 000 Jahren vor Heute, dem Temperaturminimum der letzten Eiszeit, dem sogenannten “Last Glacial Maximum” (LGM), zum anderen zum Höhepunkt der letzten Warmzeit, der Eem-Warmzeit, um 128 000 Jahren vor Heute, (siehe Abbildung 6.10), mit dem simulierten Eisschild von Heute verglichen. Der Temperaturunterschied zu Heute beträgt für das Last Glacial Maximum  $\Delta T_{\text{ma}} = -8.82^\circ\text{C}$  und für den ausgewählten Zeitpunkt der Eem-Warmzeit  $\Delta T_{\text{ma}} = +2.21^\circ\text{C}$ .

Gleichfalls werden die Ergebnisse verschiedener Klimaszenarien für eine fortschreitende globale Erwärmung betrachtet. Hierzu wird eine zukünftige Temperaturentwicklung in der Südpolregion für die nächsten tausend Jahre, als Fortführung der in Kapitel [4.8] vorgestellten Klimaentwicklung, ermittelt. In dem IPCC-Report von 2001 [34] wird ein Ansteigen der globalen Jahresmitteltemperatur um  $1.4^\circ\text{C}$  bis  $5.8^\circ\text{C}$  in den nächsten einhundert Jahren vorhergesagt. Ein solcher Anstieg führt aber in den Polargebieten der Erde aufgrund positiver Feedbackprozesse, wie z.B. der Reduzierung der Albedo durch eine geringere Eis- und Schneebedeckung der Erde, zu einem weit höheren Temperaturanstieg, während sich die Temperatur in der Nähe des Äquators im Mittel kaum ändert. In welchem Maße sich aber die Jahresmitteltemperatur an den Polen mit der globalen



Jahresmitteltemperatur ändert ist nur schwer zu bestimmen. Die Erwärmung in den Polargebieten wird aber wahrscheinlich über dem globalen Mittel liegen.

Da der Autor noch immer die Hoffnung hegt, dass die Menschheit ihren Fehler eingesteht und Maßnahmen zu dessen Korrektur ergreift, wird bei den Rechnungen von einem sich mit der Zeit abschwächenden Temperaturanstieg ausgegangen, der sich asymptotisch einem Maximalwert annähert (siehe Abb. 6.11).



**Abbildung 6.11:** Angenommene Entwicklung der Jahresmitteltemperatur ( $\Delta T_{\text{ma,max}} = 12\text{ °C}$ )

Für die Simulationen eines zukünftigen antarktischen Eisschildes wurde ein Ansteigen der Jahresmitteltemperatur auf einen Maximalwert  $\Delta T_{\text{ma,max}}$  von  $6\text{ °C}$ ,  $12\text{ °C}$  und  $18\text{ °C}$  angenommen.

Die Ergebnisse der Simulation der Eem-Warmzeit (Abbildung 6.13 und 6.16) und des Last-Glacial-Maximums (Abbildung 6.14 und 6.17) zeigen auf den ersten Blick ein überraschendes Ergebnis. Das Volumen des Eisschildes (siehe Tabelle 6.1) zur Eem-Warmzeit, mit ihrer  $2.21\text{ °C}$  höheren Jahresmitteltemperatur, ist größer als die des heutigen Eisschildes und des Eisschildes zur Zeit des fast  $9\text{ °C}$  kälterem LGM. Dies lässt sich aber dadurch erklären, dass die Massenbilanz eines Eisschildes von drei Temperatur abhängigen Faktoren bestimmt wird:

1. Die Schneefallrate, die mit steigender Temperatur zunimmt und unterhalb einer gewissen Grenztemperatur nahezu Null beträgt, siehe hierzu auch Gleichung (4.2).
2. Der Ablation, d.h. dem Massenverlust durch Schmelzen an der Oberfläche. Diese ist aber im Normalfall für den überwiegenden Teil der Antarktis mit ihrer sehr niedrigen Oberflächentemperatur (Abbildung 6.15) vernachlässigbar klein.
3. Den Massenverlust durch Kalben am Rand, der stark von dem Massentransport aus dem Inneren des Eisschildes und somit von der Fließgeschwindigkeit abhängt.

Berücksichtigt man diese Zusammenhänge zeigt sich, dass in der Eem-Warmzeit das Eisschild vor allem in Randnähe, aufgrund der etwas höheren Schneefallrate als heute, dicker

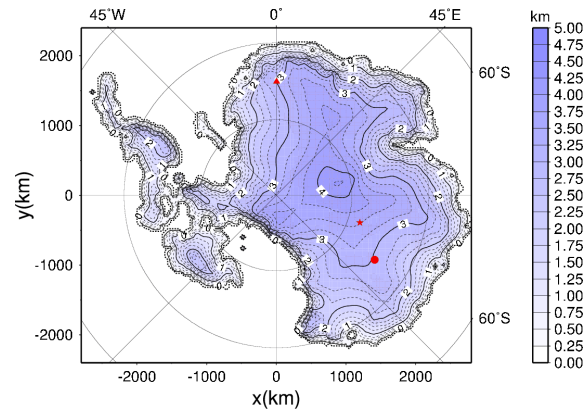


Abbildung 6.12: Heute: Höhe der Eisoberfläche bezüglich Normal Null in km.

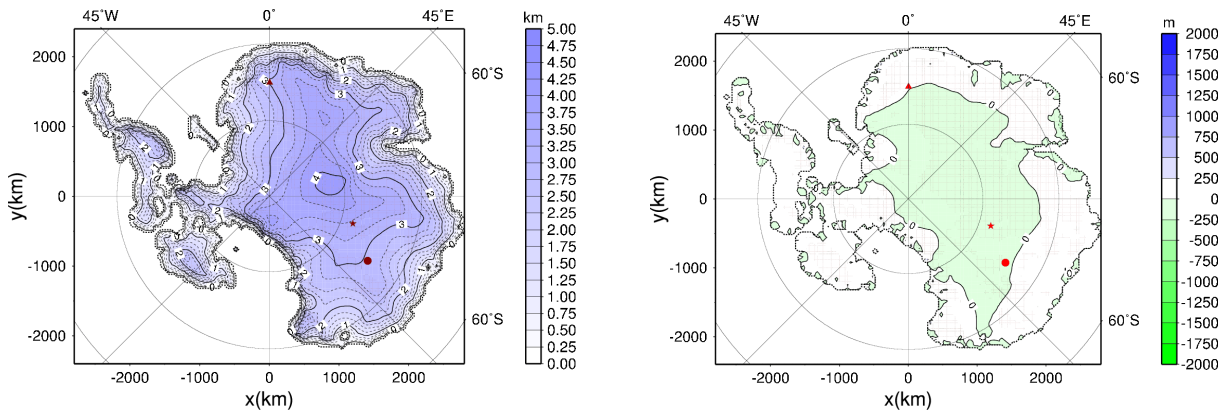


Abbildung 6.13: Eem: Höhe der Eisoberfläche in km (links); Differenz der Eisoberflächentopographie zu heute (rechts).

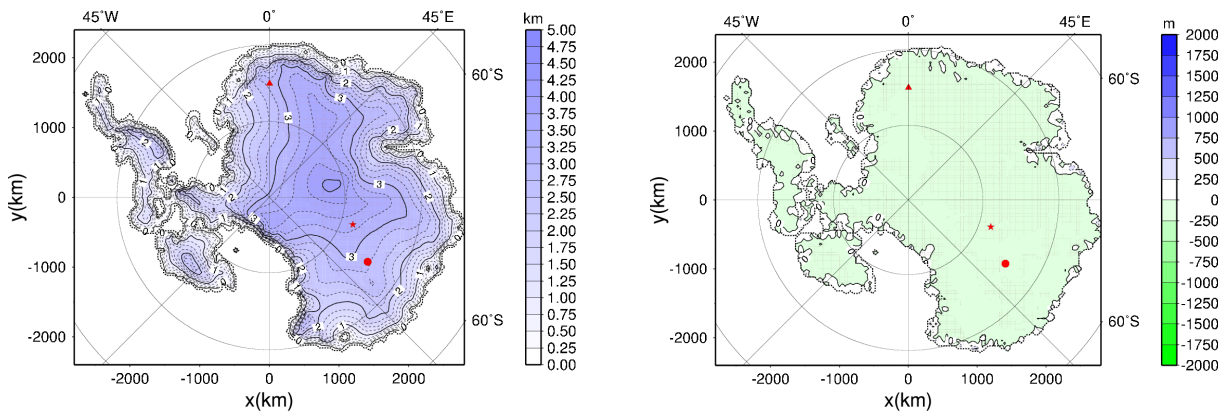
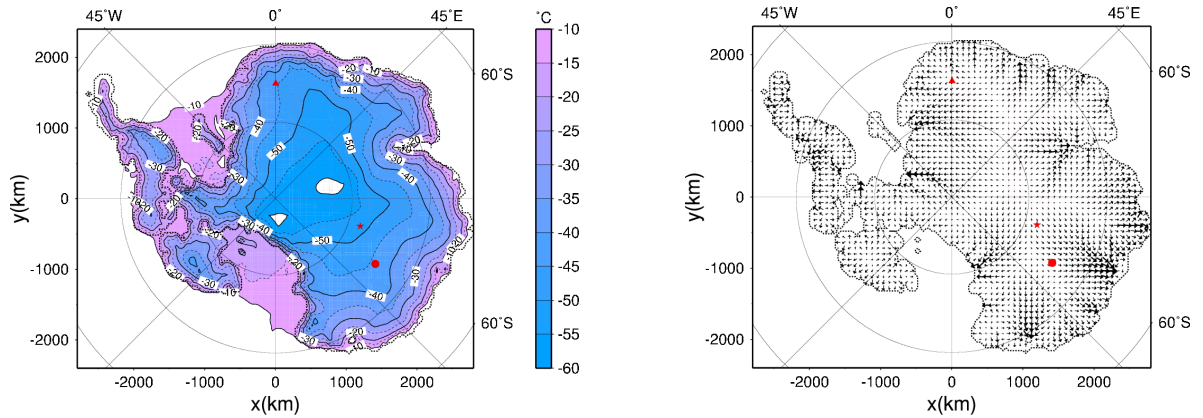
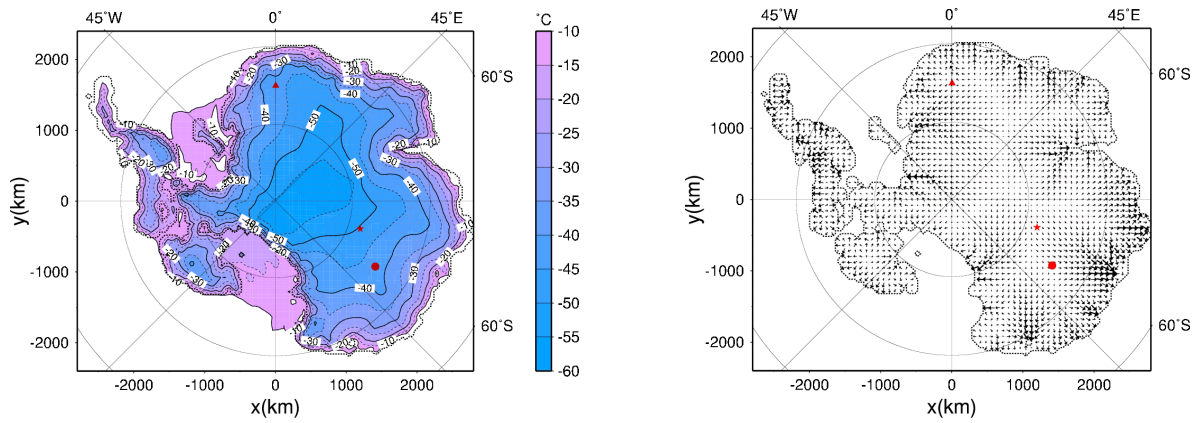


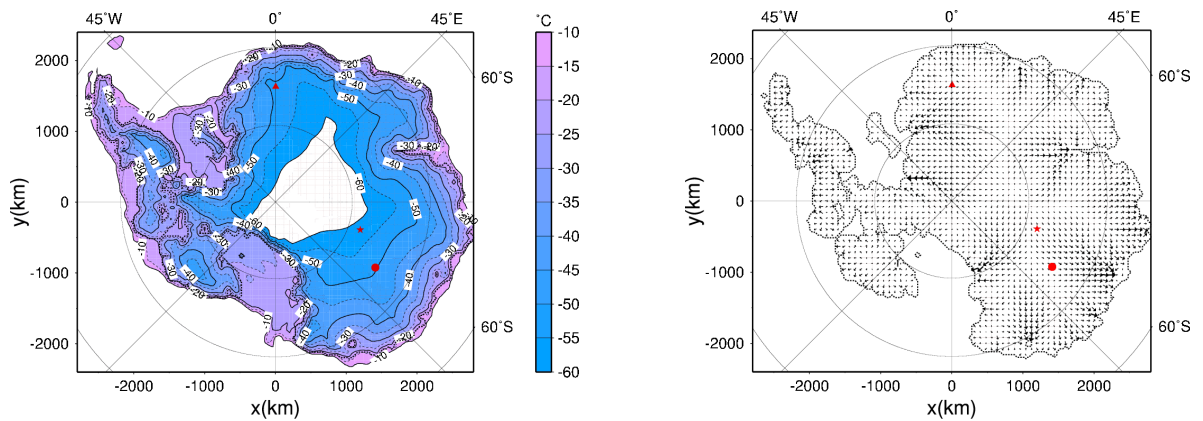
Abbildung 6.14: LGM: Höhe der Eisoberfläche in km (links); Differenz der Eisoberflächentopographie zu heute (rechts).



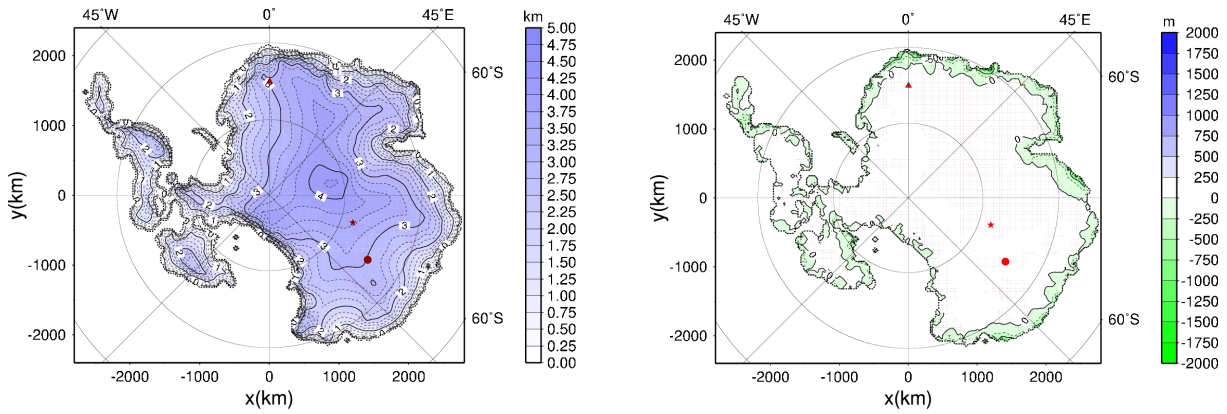
**Abbildung 6.15:** Heute: Oberflächentemperatur in °C (links); lokaler Volumenfluß in  $m^2/a$  (rechts).



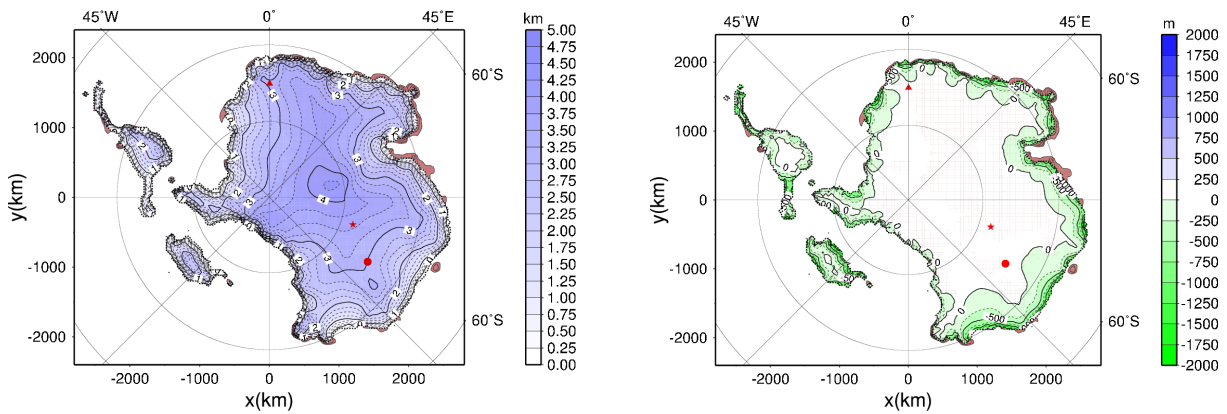
**Abbildung 6.16:** Eem: Oberflächentemperatur in °C (links); lokaler Volumenfluß in  $m^2/a$  (rechts).



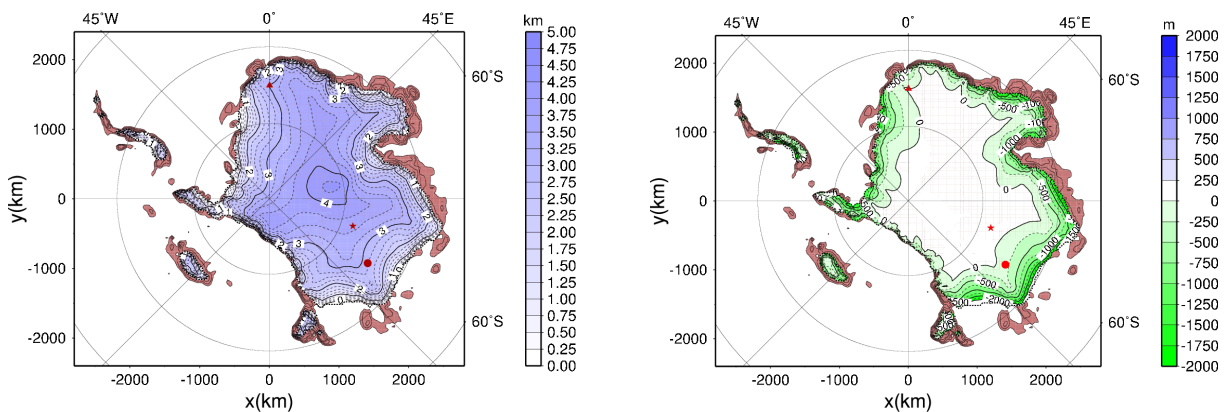
**Abbildung 6.17:** LGM: Oberflächentemperatur in °C (links); lokaler Volumenfluß in  $m^2/a$  (rechts).



**Abbildung 6.18:** Erwärmung um 6 °C: Höhe der Eisoberfläche in km (links); Differenz der Eisoberflächentopographie zu heute (rechts).

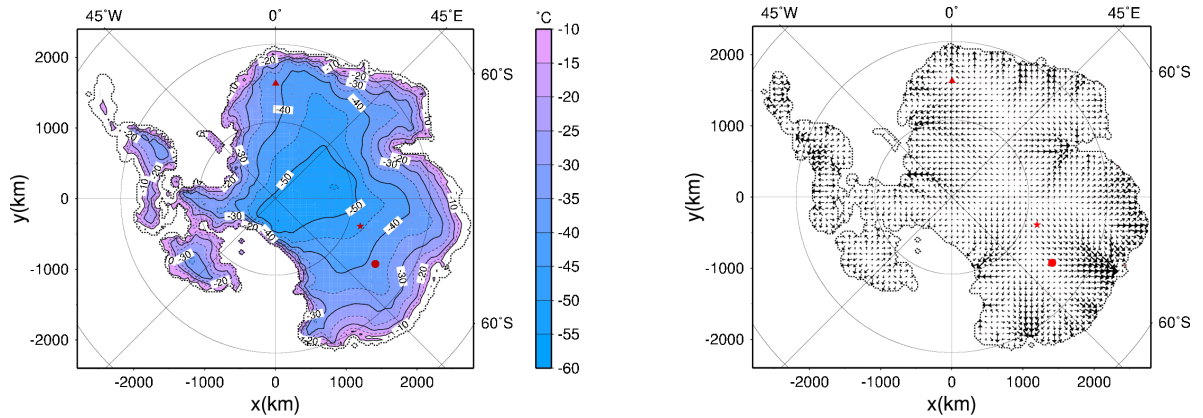


**Abbildung 6.19:** Erwärmung um 12 °C: Höhe der Eisoberfläche in km (links); Differenz der Eisoberflächentopographie zu heute (rechts).

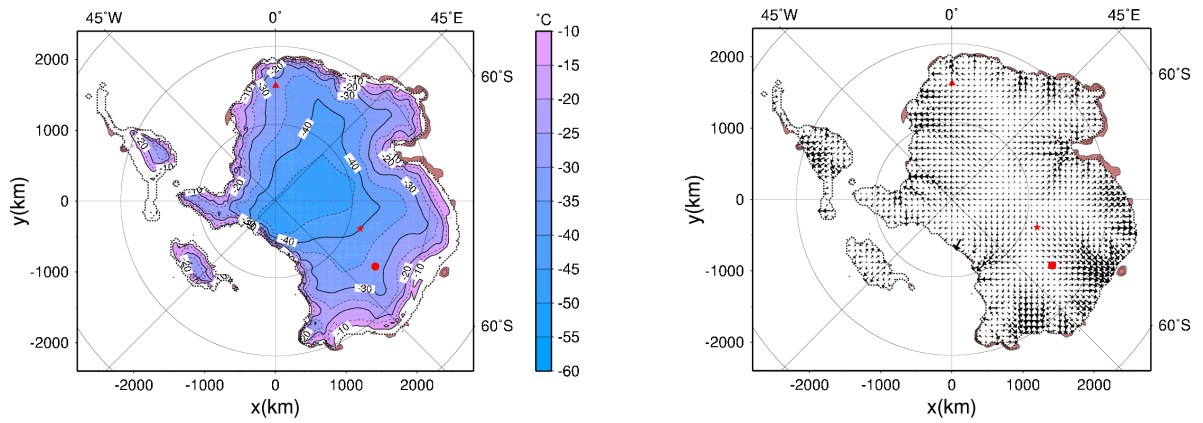


**Abbildung 6.20:** Erwärmung um 18 °C: Höhe der Eisoberfläche in km (links); Differenz der Eisoberflächentopographie zu heute (rechts).

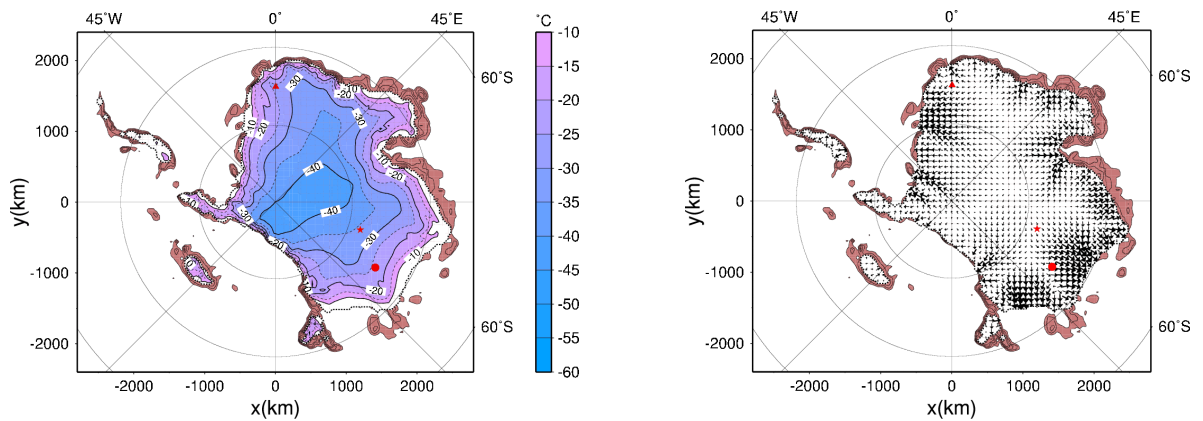




**Abbildung 6.21:** Erwärmung um  $6^{\circ}\text{C}$ : Oberflächentemperatur in  $^{\circ}\text{C}$  (links); lokaler Volumenfluß in  $\text{m}^2/\text{a}$  (rechts).



**Abbildung 6.22:** Erwärmung um  $12^{\circ}\text{C}$ : Oberflächentemperatur in  $^{\circ}\text{C}$  (links); lokaler Volumenfluß in  $\text{m}^2/\text{a}$  (rechts).



**Abbildung 6.23:** Erwärmung um  $18^{\circ}\text{C}$ : Oberflächentemperatur in  $^{\circ}\text{C}$  (links); lokaler Volumenfluß in  $\text{m}^2/\text{a}$  (rechts).

ist (Abbildung 6.13), im Inneren aber flacher, da die größere Fließgeschwindigkeit durch die Akkumulation nicht vollständig kompensiert werden kann. Ein dieser Annahmen entsprechendes Bild ergibt sich auch für das Eisschild während des LGM. Wegen der extrem niedrigen Oberflächentemperatur (Abbildung 6.17) sind die Niederschläge über dem Eisschild nahezu zum Erliegen gekommen, während der Massenfluß (Abbildung 6.17) zwar deutlich kleiner ist als heute oder in der Eem-Warmzeit, aber doch immer noch vorhanden ist.

Ob diese Ergebnisse der Wirklichkeit entsprechen läßt sich nur schwer feststellen, Informationen über die Eisdicke und Ausdehnung des antarktischen Eisschildes zu vergangenen Zeiten sind naturgemäß nur schwer zu erhalten. Allerdings lassen sich aus Sedimentbohrkernen unter den Schelfeisen Informationen über die räumliche und zeitliche Verteilung von Ablagerungen aus Material, das das Eis vom Felsboden ablöste und mit sich trug, gewinnen. Aus diesen Informationen kann man Rückschlüsse auf die Ausdehnung des Eisschildes und den Volumenfluß ziehen.

	$\Delta T_{\text{ma,max}}$ [°C]	Eisvolumen [km <sup>3</sup> ]	Volumen- änderung %	Meeresspiegel- anstieg [m]
Heute	–	$26.741 \cdot 10^6$	–	–
Eem-Warmzeit	+2.21	$26.765 \cdot 10^6$	+0.09	–0.05
Last-Glacial-Maximum	–8.82 °C	$24.856 \cdot 10^6$	–0.70	+4.58
Erwärmungs Szenario 1	6 °C	$26.423 \cdot 10^6$	–1.19	+0.77
Erwärmungs Szenario 2	12 °C	$23.639 \cdot 10^6$	–11.60	+7.54
Erwärmungs Szenario 3	18 °C	$18.901 \cdot 10^6$	–29.32	+19.06

**Tabelle 6.1:** Die einzelnen Simulationen, deren Temperaturunterschied zu Heute, das berechnete Volumen des antarktischen Eisschildes, die Volumenänderung und der damit verbundene Meeresspiegelanstieg.

Betrachtet man nun die Ergebnisse der Szenarien globaler Erwärmung so zeigt Abbildung 6.18, dass schon bei einer Erwärmung um 6 °C ein deutlicher Masseverlust am Rand des Eisschildes auftritt, ein Effekt der sich erwartungsgemäß mit steigender Temperatur noch verstärkt (Abbildung 6.19 für 12 °C bzw. 6.20 für 18 °C). Die Abbildungen zeigen aber auch, dass im Inneren des ostantarktischen Eisschildes kaum Veränderungen auftreten, da hier die Oberflächentemperatur (Abbildung 6.21 bis 6.23) sehr niedrig ist und selbst bei einem Anstieg um 18 °C noch mehrere 10 °C unter dem Gefrierpunkt liegt. Die vergleichsweise hohe Oberflächentemperatur am Rand führt zu einer merklichen Erhöhung des Volumenflusses, der in den Abbildungen 6.21 bis 6.23 für die verschiedenen Szenarien dargestellt ist.

Vor allem der in der Tabelle 6.1 angegebene Meeresspiegelanstieg bei den verschiedenen Erwärmungs-Szenarien verdeutlicht die enormen Auswirkungen die eine solche Erderwärmung zur Folge haben würde.





## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Wie die Diskussion der Ergebnisse zeigte, konnte das neue Verfahren zur Eisalterberechnung nicht vollständig überzeugen. Ebenso wie bei dem bisher verwendeten Verfahren, wurden in Bodennähe Alterswerte errechnet, die den Integrationszeitraum der Simulation teilweise weit über steigen, allerdings erscheinen hohe Werte des Eisalters in Anbetracht der Topographie des Bodens mit ihren Höhen und Senken als durchaus sinnvoll. Desweiteren wird das Eisalter in den oberen Schichten des Eisschildes kleiner als erwartet berechnet und auch der Altersanstieg mit zunehmender Tiefe fällt geringer aus als beispielsweise bei der, die Wirklichkeit recht gut wiedergebenden Datierung des Vostok-Bohrkerns. Ob dies aber ein Fehler des Verfahrens selbst ist muß sich erst noch zeigen, da die Simulationen im allgemeinen eine eher schlechte Übereinstimmung mit der Realität aufweisen.

Der Vergleich der Ergebnisse verschiedener Erderwärmungsszenarien mit dem heutigen Eisschild und dem Eisschild zur Zeit der Eem-Warmzeit sowie der letzten Eiszeit, ergibt ein erschreckendes Bild der Zukunft. Schon ein Anstieg der lokalen Jahresmitteltemperatur um  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ein Betrag der wie dargelegt wurde durchaus im Bereich des Möglichen liegt, führt zu einem Volumenverlust von  $315\,000\text{ km}^3$  und damit einhergehend zu einem Meeresspiegelanstieg von fast 80 cm. Ein stärkeres Ansteigen der Temperatur über der Antarktis würde weit katastrophalere Auswirkungen zeigen.

Solche Ergebnisse lassen es angebracht erscheinen auch weiterhin numerische Simulationen der größten Eismasse der Erde durchzuführen und deren Qualität zu erhöhen. Eine erhebliche Verbesserung ist vorallem durch die Implementierung eines räumlich variablen geothermen Wärmefflußes [40] zu erwarten. Gegebenenfalls ist eine neuerliche Untersuchung der Parametrisierung der zeitlichen Schneefallanpassung (Gleichung (4.2)) nötig. Aber auch die Verfeinerung der horizontalen Auflösung auf 20 km oder gar 10 km Gitterweite und die Implementierung alternativer numerischer Lösungsverfahren für Gleichungen, wie z.B. der Temperaturgleichung im Kalteisbereich oder der Wassergehaltsgleichung im temperierten Eis, auf Basis der TVD-Verfahren bieten die Möglichkeit das Eisschildmodell SICOPOLIS weiter zu verbessern.



# Literaturverzeichnis

- [1] *Dating a core: 10 Facts.*  
<http://http://www-aadc.aad.gov.au/default.asp?casid=1759>. – Australian Antarctic Division 17
- [2] BERGER, A. L.: Long-term variations of caloric insolation resulting from the earth's orbital elements. In: *Quaternary Research* 9 (1978), S. 139–167 14, 93
- [3] BRAITHWAITE, R.J. ; OLESEN, O. B.: Calculation of glacier ablation from air temperature, West Greenland. In: OERLEMANS, J. (Hrsg.): *Glacier fluctuations and climatic change*. Kluwer, 1989, S. 219–233 57
- [4] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Handbook of mathematics*. Verlag Harry Deutsch, Thun and Frankfurt/Main, and Van Nostrand Reinhold Company, 1995 32, 71
- [5] BUDD, W. F. ; JENSSEN, D. ; MAVRAKIS, E. ; COUTTS, B.: Modelling the Antarctic ice-sheet changes through time. In: *Annals of Glaciology* 20 (1994), S. 291–297 31
- [6] CALOV, R.: A three-dimensional thermomechanical ice sheet model coupled to a climate model – theory, model test and application to the northern hemisphere ice sheets / Report, EU project Human Mobility, Université Catholique de Louvain, Belgium. 1997. – Forschungsbericht 37
- [7] CALOV, R. ; HUTTER, K.: The thermomechanical response of the Greenland ice sheet to various climate scenarios. In: *Climate Dynamics* 12 (1996), S. 243–260 31
- [8] CHURCH, J.A.: Changes in sea level. In: HOUGHTON, J.T. (Hrsg.): *Climate Change 2001: The Scientific Basis*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2001, S. 639–693 16
- [9] CLAUSSEN, M. ; U. CUBASCH, R. G. und: Klima und Klimaänderungen. In: *Wissenschaftliche Mitteilungen aus dem Institut für Meteorologie der Universität Leipzig*

- (2002), S. 44–50. – Sonderheft zum Jahr der Geowissenschaften - Atmosphäre 13, 15
- [10] CROWLEY, T.J.: Causes of climate change over the last 1000 years. In: *Science* 289 (2000), S. 270–277 15
- [11] DANSGAARD, W. ; JOHNSEN, S.J.: A flow model and a time scale for the ice core from Camp Century, Greenland. In: *Journal of Glaciology* 8 (1969), Nr. 53, S. 215–223 19
- [12] ENTING, I.E. ; WIGLEY, T.M.L. ; HEIMANN, M.: Future Emissions and Concentrations of Carbon Dioxide: Key Ocean/Atmosphere/Land Analyses. In: *CSIRO Division of Atmospheric Research Technical Paper* 31 (1994) 15
- [13] FABRÉ, A. ; LETRÉGUILLY, A. ; RITZ, C. ; MANGENEY, A.: Greenland under changing climates: sensitivity experiments with a new three-dimensional ice sheet model. In: *Annals of Glaciology* 21 (1995), S. 1–7 31
- [14] FOX, A.J. ; COOPER, A.P.R.: Measured properties of the Antarctic ice sheet derived from the SCAR Antarctic Digital Database. In: *Pol. Rec.* 30 (1994), S. 201–206 54
- [15] GREVE, R.: *Thermomechanisches Verhalten polythermer Eisschilde – Theorie, Analytik, Numerik*. Shaker Verlag, Aachen, Germany, 1995 (Berichte aus der Geowissenschaft) 13, 24, 26, 28, 32, 41, 49, 54, 57, 92
- [16] GREVE, R.: Application of a polythermal three-dimensional ice sheet model to the Greenland Ice Sheet: Response to steady-state and transient climate scenarios. In: *Journal of Climat* 10 (1997), Nr. 5, S. 901–918 31
- [17] GREVE, R.: On the response of the Greenland ice sheet to greenhouse climate change. In: *Climatic Change* 46 (2000), S. 289–303 56
- [18] GREVE, R.: Inlandeismodelle. In: *Promet* 29 (2002), Nr. 1-4, S. 98–104 23
- [19] GREVE, R. ; WANG, Y. ; MÜGGE, B.: Comparison of numerical schemes for the solution of the advective age equation in ice sheets. In: *Annals of Glaciology* 35 (2002), S. 487–494 66
- [20] HAYS, J. D. ; IMBRIE, J. ; SHACKLETON, N. J.: Variations in the Earth's orbit: pacemaker of the ice ages. In: *Science* 194 (1976), Nr. 4270, S. 1121–1132 14, 93
- [21] HERTERICH, K.: *Modellierung eiszeitlicher Klimaschwankungen*. Fachbereich Geowissenschaften, Universität Hamburg, Germany, 1990 28

- [22] HUMBERT, A.: *Simulations of the Flow of the Ross Ice Shelf, Antarctica: parameter sensitivity tests and temperature-dependent rate factor*, Institut für Mechanik AGIII, Technische Universität Darmstadt, Germany, Dissertation, 2000 24
- [23] HUTTER, K.: *Theoretical glaciology; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983 25
- [24] HUYBRECHTS, P.: The Antarctic ice sheet and environmental change: a three-dimensional modelling study / Bericht aus der Polarforschung. 1992 (99). – Forschungsbericht 31, 57
- [25] HUYBRECHTS, P.: Glaciological modelling of the late Cenozoic East Antarctic ice sheet: Stability or dynamism? In: *GEOGRAFISKA ANNALER SERIES A-PHYSICAL GEOGRAPHY* 75 A (1993), Nr. 4, S. 221–238 59
- [26] IMBRIE, J. ; HAYS, J.D. ; MARTINSON, D.G. ; MCINTYRE, A. ; MIX, A.C. ; MORLEY, J.J. ; PISIAS, W.L. ; PRELL, W.L. ; SHACKELTON, N.J.: The orbital theory of Pleistocene climate: Support from a revised chronology of the marine  $\delta^{18}\text{O}$  record. In: AL., A. Berger et (Hrsg.): *Milankovitch and climate* Bd. 126. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1984, S. 269–305 60
- [27] JOUZEL, J. ; BARKOV, N.I. ; BARNOLA, J.M. ; BENDER, M. ; CHAPPELLAZ, J. ; GENTHON, C. ; KOTLYAKOV, V.M. ; LIPENKOV, V. ; LORius, C. ; PETIT, J.R. ; RAYNAUD, D. ; RAISBECK, G. ; RITZ, C. ; SOWERS, T. ; STIEVENARD, M. ; YIOU, F. ; YIOU, P.: Extending the Vostok ice-core record of palaeoclimate to the penultimate glacial period. In: *Nature* 364 (1993), S. 407–12 19
- [28] KNELL, S.: *Modellierung der isostatischen Verschiebung der Lithosphäre als Reaktion auf eine zeitlich veränderliche Vereisung*, Institut für Mechanik AGIII, Technische Universität Darmstadt, Germany, Diplomarbeit, 2003 55
- [29] KRAUS, H.: Was ist Luft? In: *Wissenschaftliche Mitteilungen aus dem Institut für Meteorologie der Universität Leipzig* (2002), S. 1–9. – Sonderheft zum Jahr der Geowissenschaften - Atmosphäre 13
- [30] LEVEQUE, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Verlag Birkhäuser, 1999 (Lectures in Mathematics) 18, 21, 65
- [31] LIU, H. ; JEZEK, K. ; LI, B.: Radarsat Antarctic Mapping Project Digital Elevation Model / Boulder, CO: National Snow and Ice Data Center. 2000. – Forschungsbericht. – Digital media 52, 53

- [32] LIU, H. ; JEZEK, K.C. ; LI, B.: Development of an Antarctic digital elevation model by integrating cartographic and remotely sensed data: A geographic information system based approach. In: *Journal of Geophysical Research* 104 (1999), Nr. B10, S. 199–212 52
- [33] LYTHE, M.B. ; VAUGHAN, D.G. ; BEDMAP CONSORTIUM the: BEDMAP - bed topography of the Antarctic. 1:10,000,000 scale map / BAS (Misc) 9. Cambridge, British Antarctic Survey. 2000. – Forschungsbericht 53
- [34] MCCARTHY, J.J. (Hrsg.) ; CANZIANI, O.F. (Hrsg.) ; LEARY, N.A. (Hrsg.) ; D.J., Dokken (Hrsg.) ; WHITE, K.S. (Hrsg.): *Climate Change 2001: Impacts, Adaptation & Vulnerability*. Cambridge University Press, UK, 2001. – Contribution of Working Group II to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) 96
- [35] MILANKOVIĆ, M.: Kanon der Erdbestrahlung / Königliche Serbische Akademie, Belgrad, Spec. Publ. 1941 (132). – Forschungsbericht 14, 93
- [36] PETIT, J.R. ; JOUZEL, J. ; RAYNAUD, D. ; BARKOV, N.I. ; BARNOLA, J.-M. ; BASILE, I. ; BENDER, M. ; CHAPPELLAZ, J. ; DAVIS, M. ; DELAYQUE, G. ; DELMOTTE, M. ; KOTLYAKOV, V.M. ; LEGRAND, M. ; LIPENKOV, V.Y. ; LORIUS, C. ; PEPIN, L. ; RITZ, C. ; SALTZMAN, E. ; STIEVENARD, M.: Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica. In: *Nature* 399 (1999), S. 429–436 17, 18, 19, 59, 92
- [37] REEH, N.: Parameterization of melt rate and surface temperature on the Greenland ice sheet. In: *Polarforschung* 59 (1991), Nr. 3, S. 113–128 57
- [38] SAVVIN, A.A.: *Grenzschichttheorie nichtlinearer Kriechströmungen und ihre Anwendung auf das EPICA-Vorhaben*, Institut für Mechanik AGIII, Technische Universität Darmstadt, Germany, Dissertation, 1999 92
- [39] SCHÖNWEISE, Ch.: *Klimaänderungen*. Springer Verlag, 1995 90
- [40] SJÖBERG, H. ; SJÖDIN, J. ; NELSON, R.: *Geothermal heat flow and snowmelt runoff from the antarctic land ice*.  
<http://www.sb.luth.se/bon/projects/Antartic%20Melt%20Flow.pdf>. 2001 59, 105
- [41] VAUGHAN, D.G. ; BAMBER, J.L. ; GIOVINETTO, J. ; COOPER, A.: Reassessment of the Net Surface Mass Balance in Antarctica. In: *Journal of Climate* 12 (1999), Nr. 4, S. 933–946 56

- [42] WEIS, M.: *Theory of shallow ice shelves and numerical implementation*, Institut für Mechanik AGIII, Technische Universität Darmstadt, Germany, Dissertation, 2000

24





# Abbildungsverzeichnis

1.1	Kohlendioxidkonzentration und Jahresmitteltemperatur . . . . .	15
1.2	Vostok-Bohrkern: Deuteriumkonzentration . . . . .	17
1.3	Vostok-Bohrkern: Altersverteilung über die Tiefe . . . . .	18
3.1	Schematische Darstellung eines Eisschildes . . . . .	23
3.2	SICOPOLIS: $\sigma$ -Transformation . . . . .	41
3.3	SICOPOLIS: Rechengitter . . . . .	49
4.1	SICOPOLIS: Funktionsschema . . . . .	52
4.2	Input: Eisoberflächentopographie . . . . .	53
4.3	Input: Topographie des Felsbodens . . . . .	54
4.4	Input: Topographie des entspannten Felsgrundes . . . . .	55
4.5	Input: Schneefall . . . . .	56
4.6	Input: Temperatur an der Oberfläche . . . . .	58
4.7	Input: Temperaturvariation . . . . .	59
4.8	Input: Meeresspiegel-Evolution . . . . .	60
5.1	Vereisungsgrenze auf dem Rechengitter . . . . .	68
6.1	Eisoberflächendifferenz: Szenario 1 minus Meßwerte . . . . .	90
6.2	Eisoberflächendifferenz: Szenario 2 minus Meßwerte . . . . .	91
6.3	Eisoberflächendifferenz: Szenario 3 minus Meßwerte . . . . .	91
6.4	Altersverteilungen über die Tiefe; Ergebnisse . . . . .	92
6.5	Input: Temperaturvariation . . . . .	93
6.6	Eisalter auf 90% Tiefe (neues Verfahren) . . . . .	94
6.7	Eisalter auf 99% Tiefe (neues Verfahren) . . . . .	94
6.8	Eisalter auf 90% Tiefe (altes Verfahren) . . . . .	95
6.9	Eisalter auf 99% Tiefe (altes Verfahren) . . . . .	95
6.10	Entwicklung der Jahresmitteltemperatur über die letzten 422 000 Jahre . .	96
6.11	Angenommene Entwicklung der Jahresmitteltemperatur . . . . .	97

6.12 Heute: Eisoberflächentopographie . . . . .	98
6.13 Eem: Eisoberflächentopographie . . . . .	98
6.14 LGM: Eisoberflächentopographie . . . . .	98
6.15 Heute: Oberflächentemperatur und lokaler Volumenfluß . . . . .	99
6.16 Eem: Oberflächentemperatur und lokaler Volumenfluß . . . . .	99
6.17 LGM: Oberflächentemperatur und lokaler Volumenfluß . . . . .	99
6.18 Erwärmung um 6 °C: Eisoberflächentopographie . . . . .	100
6.19 Erwärmung um 12 °C: Eisoberflächentopographie . . . . .	100
6.20 Erwärmung um 18 °C: Eisoberflächentopographie . . . . .	100
6.21 Erwärmung um 6 °C: Oberflächentemperatur und lokaler Volumenfluß . . .	101
6.22 Erwärmung um 12 °C: Oberflächentemperatur und lokaler Volumenfluß . .	101
6.23 Erwärmung um 18 °C: Oberflächentemperatur und lokaler Volumenfluß . .	101

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Bernd Mügge  
Adresse: Flughafenstrasse 3c, D-64347 Griesheim  
Geburtsdatum: 25.04.1972  
Geburtsort: Darmstadt  
Familienstand: ledig

## Schule, Wehrdienst

08/1978 - 06/1982 Käthe-Kollwitz-Schule Darmstadt  
(Grundschule)  
08/1982 - 06/1984 Diesterwegschule Darmstadt  
(Förderstufe)  
08/1984 - 06/1991 Eleonorenschule Darmstadt  
(Gymnasium)  
11.06.1991 Abitur  
10/1991 - 09/1992 Wehrdienst

## Studium

10/1992 - 07/1999 Studium der Physik bzw. Mechanik an der  
TU Darmstadt,  
Schwerpunkte: Strömungsmechanik, Kontinuumsmechanik  
08.07.1999 Diplom-Ingenieur

## Promotion

08/1999 - 07/2004 Promotionstudent bzw. wiss. Mitarbeiter  
TU Darmstadt, Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe 3